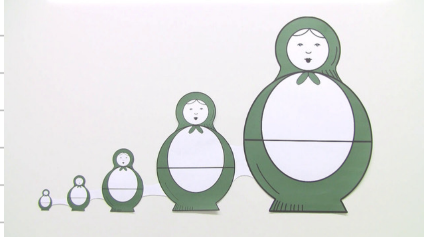
Folgen und Reihen

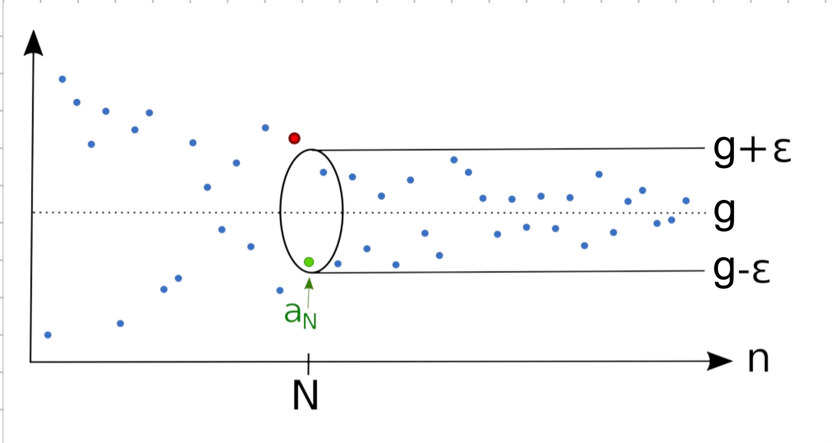


Folge

Funktion $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto a_n$

Grenzwert einer Folge

$g \in \mathbb{R}$ heisst Grenzwert oder Limes der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ |a_n - g| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$



Vorgehen Grenzwert beweisen:

1. $|a_n - g|$ so weit wie möglich vereinfachen
2. $n \geq N$ verwenden, um eine Abschätzung $|a_n - g| \leq f(N)$ zu erhalten
3. $f(N) < \varepsilon$ nach N auflösen
4. typischerweise erhält man damit eine von ε abhängige untere Schranke für N

Konvergenz, Divergenz

konvergent:
$\langle a_n \rangle$ besitzt Grenzwert $g \in \mathbb{R}$

symbolische Schreibweise: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$

divergent:
$\langle a_n \rangle$ besitzt kein Grenzwert $g \in \mathbb{R}$

bestimmt divergent gegen $\pm\infty$:
$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} : a_n \gtrless M \quad \forall n \geq N$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$

unbestimmt divergent:
nicht best. div.

Cauchy-Folge

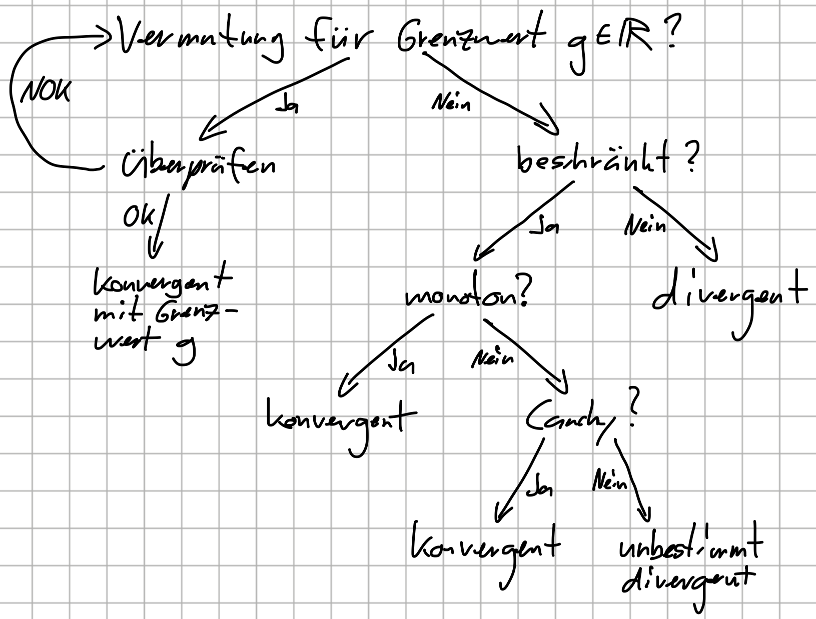
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m,n \geq N$

Konvergenzkriterien Folgen

1. konvergent $\Rightarrow$ beschränkt
2. falls monoton: beschränkt $\Leftrightarrow$ konvergent
3. Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ konvergent

$\rightarrow$ 1. ist äquivalent zu: unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent

Entscheidungsbaum Konvergenz / Divergenz Folgen:



Grenzwert einer Funktion

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, möglicherweise $x_0 \notin D$

$g \in \overline{\mathbb{R}}$ heisst Grenzwert der Funktion f an Stelle x_0, wenn für jede Folge $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$

symbolische Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$

Stetigkeit von Funktionen

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

f ist stetig an Stelle x_0, falls der Grenzwert von f an Stelle x_0 existiert und mit dortigem Funktionswert übereinstimmt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Zwischenwertsatz

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ stetig und $[a,b] \subseteq D$ $(a<b)$, dann gilt:

$[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$

anders gesagt: stetige F. nimmt auf abgeschl. Intervall $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

Satz vom Minimum und Maximum

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ stetig und $[a,b] \subseteq D$ $(a<b)$, dann gilt:

$\exists\, \underline{x}, \overline{x} \in [a,b]: f([a,b]) = [f(\underline{x}), f(\overline{x})]$

anders gesagt: Bild eines abgeschlossenen Intervalls ist unter stetigen F. ein abgeschlossenes Intervall

Leere Summe / Produkt

$\sum_{k=l}^{n} a_k := 0, \quad \prod_{k=l}^{n} a_k := 1, \quad l \in \mathbb{Z},\ l > n$

Gaussche Summenformel

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$

1	2	$\dots$	$n-1$	n
n	$n-1$	$\dots$	2	1
$n+1$	$n+1$	$\dots$	$n+1$	$n+1$

n-te Partialsumme d. geom. Folge

geom. Folge $a_k := q^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

n-te Partials. $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k, \quad n \in \mathbb{N}$

$q = 1: \quad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$

$q \neq 1: \quad (1-q) s_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q^k - q^{k+1}) = q^0 - q^n = 1 - q^n$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \begin{cases} n & q = 1 \\ \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Reihe

für Folge (a_n) heisst Folge (s_n) d. Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \in \mathbb{R}$
(unendliche) Reihe

symbolische Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Konvergenz, Divergenz von Reihen

→ erhält man aus Konvergenz/Divergenz d. Folge d. Partials. $\langle s_n \rangle$

sei $\sum_{n=1}^{\infty}$ eine Reihe und $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ die n-te Partials., $n \in \mathbb{N}$

konvergent:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst konvergent, wenn Folge $\langle s_n \rangle$ konvergent

Grenzwert $s := \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$ ist der Wert d. Reihe:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$

divergent:

bestimmt div: $\langle s_n \rangle$ bestimmt div.

unbest. div: nicht best. div.

absolut konvergent:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst abs. konvergent, wenn Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent

konvergente Reihe, die nicht abs. konvergent ist, heisst bedingt konvergent

abs. konvergent → konvergent, aber nicht umgekehrt

wichtige Reihen

		Konvergenz:
harmonische Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	best. div. gegen $+\infty$
alt. harm. Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$	bed. konv. mit Wert $\ln(2)$
geom. Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n,\ q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	falls $q \leq -1$ unb. div. falls $-1 < q < 1$ abs. konv. mit W. $\frac{1}{1-q}$ falls $1 \leq q$ best. div gegen $+\infty$

falls Partialsummen s_n, $n \in \mathbb{N}$ als Funktion von n bekannt, kann man Konv./Div. von Reihen direkt mit Def. überprüfen

→ häufig jedoch schwierig Partialsummen explizit anzugeben

→ daher verwendet man meistens andere Konvergenzkriterien

Konvergenzkriterien für Reihen

1. notwendige B.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ($\langle a_n \rangle$ notwendigerweise Nullfolge)

2. Leibniz-Krit.: alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konv falls $\langle a_n \rangle$ monotone Nullfolge

3. Quotientenkr.: sei $L := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$
   - $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konv.
   - $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent
   - $L = 1$ oder L n. existent $\Rightarrow$ keine Aussage

4. Wurzelkr.: sei $q := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
   - $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konv.
   - $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent
   - $q = 1$ oder q n. existent $\Rightarrow$ keine Aussage

5. Majorantenkr.: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. und $\exists N \in \mathbb{N} : |a_n| \leq b_n \ \forall n \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konv.

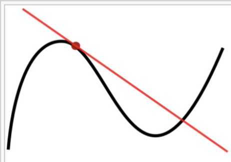
6. Minorantenkr.: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ div. und $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq b_n \geq 0 \ \forall n \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Bemerkungen

- Vorgehen der Reihe nach, da von oben nach unten tendenziell schwieriger
- Majorante oft geom. Reihe mit $|q| < 1$, Minorante oft harm. Reihe
- selbst wenn man Konvergenz nachweisen kann oft schwierig Wert zu bestimmen

Differenzialrechnung

Differenzierbarkeit, Ableitung



The graph of a function, drawn in black, and a tangent line to that graph, drawn in red. The slope of the tangent line is equal to the derivative of the function at the marked point.

$f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

f heisst differenzierbar an Stelle x_0, falls Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ an Stelle x_0 einen reellen Grenzwert besitzt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$$

in diesem Fall bezeichnet man den Grenzwert als Ableitung von f an Stelle x_0 oder als Differenzialquotient der f an Stelle x_0

Bemerkungen:

- Differenzenquotient auf $D \setminus \{x_0\}$ definiert, für Ableitung ist der Grenzwert an Stelle x_0 zu bestimmen
- symbolische Schreibweise für Ableitung einer f an Stelle x_0:
  Lagrange: $f'(x_0)$, Leibniz: $\frac{df}{dx}(x_0)$, Newton: $\dot{s}(t_0)$ (für zeitabh. F.)
- alternative Schreibweisen Differenzialquotient (mithilfe Variablentransformation):
  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{h:=x-x_0}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{\Delta x:=h}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
- f diff'bar an Stelle x_0 $\Rightarrow$ f stetig an Stelle x_0
- falls f an jeder Stelle $x_0 \in D$ diff'bar, so ist f eine diff'bare Funktion
  - $f': D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ heisst dann Ableitung(sfunktion) d. Funktion f
- ist f' stetig, heisst f stetig diff'bar
- eine f, deren Ableitungen $f^{(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ existieren, heisst beliebig oft diff'bar oder unendlich oft diff'bar oder auch glatt
- $C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$

  f stetig $\Leftarrow$ f diff'bar $\Leftarrow$ f stetig diff'bar
  $\Leftarrow$ f 2-mal diff'bar $\Leftarrow$ f 2-mal stetig diff'bar
  $\Leftarrow$ f 3-mal diff'bar $\Leftarrow$ $\dots$ $\Leftarrow$ f glatt

Dreiecksungleichung

$$||x|-|y|| \leq |x \pm y| \leq |x|+|y|$$

n-tes Taylorpolynom

sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, f (mind.) n-mal diff'bar bei $x_0 \in D$

dann ist n-tes Taylorpolynom von f an Stelle x_0 gegeben durch Polynomfunktion vom Grad $\leq n$ (!) $T_n f(\cdot\,; x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_n f(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkungen

- hier $f^{(0)} = f$
- Grad von $T_n f(\cdot\,; x_0)$ kann $< n$ sein
- für glatte Funktionen kann man den Grenzübergang $n \to \infty$ machen, um die Taylorreihe zu erhalten (AN2)

Taylor-Formel

sei $n \in \mathbb{N}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, f (mind.) n-mal diff'bar bei $x_0 \in D$

dann existiert Funktion $h_n(\cdot\,; x_0)$ $D \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = T_n f(x; x_0) + h_n(x; x_0)(x-x_0)^n, \quad \forall x \in D \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} h(x; x_0) = 0$$

Bemerkung: f lässt sich durch n-tes T.pol. in d. Nähe von x_0 beliebig genau approximieren, denn es gilt gemäss Taylorformel

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - T_n f(x; x_0)}{(x-x_0)^n}}_{= h_n(x; x_0) \text{ für } x \neq 0} = 0$$

Approximationsfehler $f(x) - T_n f(x; x_0)$ geht also für $x \to x_0$ gegen 0, und zwar schneller als $(x-x_0)^n$

Ableitungsregeln

1. Faktorregel: $(cf)' = cf'$,
2. Summenregel: $(f+g)' = f' + g'$,
3. Produktregel: $(fg)' = f'g + fg'$,
4. Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,
5. Kettenregel: $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$,
6. Umkehrregel: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

aus 1. & 2. folgt, dass die Abbildung $': f \mapsto f'$, die einer diff'baren Funktion ihre Ableitung zuweist, linear ist: $(\alpha f + g)' = \alpha f' + g'$ für diff'bare Funktionen f, g und Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ (LA2)

Ableitung elementarer Funktionen

Potenzfunktionen Differenzierbarkeit

Bemerkung: Im Fall $r \in (0,1)$ sind die Potenzfunktionen x^r stetig an der Stelle $x = 0$, aber an dieser Stelle nicht differenzierbar, weil der Differenzialquotient

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^r - 0^r}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^{r-1}, \quad r \in (0,1),$$

entweder nicht existiert oder unendlich ist. Dies betrifft u. a. die n-ten Wurzeln, die bei $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar sind. Es impliziert auch, dass Potenzfunktionen mit nichtganzzahligen positiven Exponenten an der Stelle $x = 0$ höchstens endlich oft differenzierbar sind.

Für $r \in (-\infty, 0] \cup \mathbb{N}$ sind hingegen die Potenzfunktionen x^r beliebig oft differenzierbar (an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs).

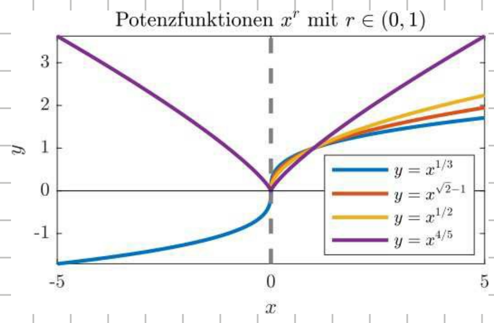


Tabelle Ableitung elementarer Funktionen

$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}$	$(c)' = 0$
$\log_b'(x) = \frac{1}{x\ln(b)}, \quad b > 0,\, b \neq 1$	$\ln'(x) = \frac{1}{x}$
$(a^x)' = a^x \ln(a), \quad a > 0$	$\exp'(x) = \exp(x)$
$\sin'(x) = \cos(x)$	$\csc'(x) = -\csc(x)\cot(x)$
$\cos'(x) = -\sin(x)$	$\sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$
$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$	$\cot'(x) = -1 - \cot^2(x) = -\csc^2(x)$
$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccsc}'(x) = -\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsec}'(x) = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh'(x) = \cosh(x)$	$\operatorname{csch}'(x) = -\operatorname{csch}(x)\coth(x)$
$\cosh'(x) = \sinh(x)$	$\operatorname{sech}'(x) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$
$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$	$\coth'(x) = 1 - \coth^2(x) = -\operatorname{csch}^2(x)$
$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsch}'(x) = -\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arsech}'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Kurvendiskussion

Der Graph einer Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, also die Menge $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^2$, ist eine Kurve in der Ebene. Bei der Kurvendiskussion untersucht man den Verlauf dieser Kurve durch Ermitteln charakteristischer Punkte und Bestimmen d. Verhaltens auf Intervallen oder im Unendlichen.

Früher wurde Kurvendiskussion verwendet, um Graphen von Funktionen skizzieren zu können. Dies ist heute nicht mehr die Hauptanwendung der Kurvendiskussion, da leistungsfähige Funktionenplotter zur Verfügung stehen. Jedoch ist sie noch immer nützlich, um z. B. Nullstellen oder lokale Extrema von Funktionen exakt analytisch (im Gegensatz zu näherungsweise numerisch) zu bestimmen. Auch das Verhalten im Unendlichen lässt sich mit einem Funktionenplotter nur näherungsweise untersuchen.

Insbesondere für diff'bare Funktionen kann man mithilfe der Ableitung(en) und mithilfe von Grenzwerten sehr viele Informationen erhalten, die wir im Folgenden erläutern.

Mittelwertsätze der Differentialrechnung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und seien die Funktionen $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diff'bar auf (a,b).

1. Satz von Rolle (1691): $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b): f'(x_0) = 0$
2. Mittelwertsatz (Lagrange, 1797): $\exists x_0 \in (a,b): f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$
3. erw. Mittelw.s. (Cauchy, 1823): $\exists x_0 \in (a,b): f'(x_0)(g(b)-g(a)) = g'(x_0)(f(b)-f(a))$

allgemeiner $\downarrow$

Monotoniekriterien für Funktionen (folgen aus dem Mittelwertsatz)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ eine auf I differenzierbar und $I \subseteq D$ ein offenes Intervall

1. $f'(x) < 0 \;\forall x \in I \Rightarrow f$ str. mon. f. auf I
2. $f'(x) = 0 \;\forall x \in I \Leftrightarrow f$ konstant auf I
3. $f'(x) > 0 \;\forall x \in I \Rightarrow f$ str. mon. w. auf I

Mit diesem Satz kann man den grösstmöglichen Def.bereich $D \subseteq \mathbb{R}$ einer F. f aufteilen in offene Intervalle, auf denen die F. f str. m. oder konstant ist.

An den Rändern dieser Intervalle verschwindet f' oder f ist dort nicht diff'bar (!). Diese sog. kritischen Punkte muss man genauer untersuchen.

(isolierter) kritischer Punkt, stationärer Punkt, Sattelpunkt

- kritischer P. : Stelle $x_0 \in D$, an der entweder f n. diff'bar oder $f'(x_0) = 0$
- isolierter k. P.: kritischer Punkt in offenem Intervall, in dem es keine anderen kr. P. gibt
- station. P. : kritischer P. mit $f'(x_0) = 0$
- Sattelp. : stat. P., der kein lokales Extremum ist

Bedingungen f. Extrempunkte

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion

1. notw. Bed.: $f' = 0$

   Sei $x_0 \in I$.

   Falls f in x_0 lokales Extr. hat und diff'bar ist bei x_0, gilt $f'(x_0) = 0$

2. hinr. Bed.: Vorzeichenwechsel von f'

   Sei f diff'bar auf I, bei $x_0 \in I$ gelte $f'(x_0) = 0$ und f' wechsle bei x_0 das Vorzeichen.

   Dann hat f in x_0 ein isoliertes lokales Extremum

   - Minimum, falls von neg. nach pos.
   - Maximum, falls von pos. nach neg.

3. hinr. Bed.: $f'' \neq 0$

   Sei f 2-mal diff'bar auf I, bei $x_0 \in I$ gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.

   Dann hat f in x_0 ein isoliertes lokales Extremum

   - Minimum, falls $f''(x_0) > 0$
   - Maximum, falls $f''(x_0) < 0$

4. hinr. Bed.: $f^{(n)} \neq 0$

   Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und sei f n-mal diff'bar. Bei $x_0 \in I$ gelten gelten $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$.

   Wenn n gerade, hat f in x_0 ein isoliertes lokales Extremum

   - Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$
   - Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$

   Wenn n ungerade, hat f in x_0 einen isolierten Sattelpunkt

Bemerkungen:

- Gemäss 1. sind stat. P. Kandidaten für lok. Extr.. Könnten auch Sattelp. sein, daher sind weitere Bed. zu prüfen.
- Vorzeichenwechsel von f' bei x_0 ist formal wie folgt definiert:
  $\exists \varepsilon > 0 \, (\forall x_l \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \wedge \forall x_r \in (x_0, x_0 + \varepsilon)): f'(x_l) f'(x_r) < 0$
- falls $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$ gilt $T_n f(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$
- hinreichende Bed. benötigen von 2. nach 4. immer stärkere Differenzierbarkeitseigenschaften
- gibt auch F., für die 2.-4. keine Aussage liefern

Krümmung

anschaulich Drehrichtung d. Tangente entlang des Graphen $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$

rechtsgekrümmt: f' streng monoton fallend

linksgekrümmt: f' streng monoton wachsend

Bedingungen für Krümmung

sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ eine auf I 2x differenzierbare F. und $I \subseteq D$ ein offenes Intervall

1. $f''(x) < 0 \; \forall x \in I \Rightarrow f$ rechtsgekrümmt auf I
2. $f''(x) = 0 \; \forall x \in I \Leftrightarrow f$ nicht gekrümmt auf I
3. $f''(x) > 0 \; \forall x \in I \Rightarrow f$ linksgekrümmt auf I

Bemerkung: erhält man aus Monotoniekriterien für Funktionen

Bedingungen f. Wendepunkte

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion

1. notw. Bed.: $f'' = 0$

   Sei $x_0 \in I$.

   Falls f in x_0 eine Wendestelle hat und 2x diff'bar ist bei x_0, gilt $f''(x_0) = 0$

2. hinr. Bed.: Vorzeichenwechsel von f''

   Sei f 2x diff'bar auf I, bei $x_0 \in I$ gelte $f''(x_0) = 0$ und f'' wechsle bei x_0 das Vorzeichen.

   Dann hat f in x_0 eine isolierte Wendestelle

3. hinr. Bed.: $f''' \neq 0$

   Sei f 3x diff'bar auf I, bei $x_0 \in I$ gelte $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

   Dann hat f in x_0 eine isolierte Wendestelle

Asymptoten, Grenzwerte

bei Kurvendiskussion ist man auch am asymptotischen Verhalten von Funktionen interessiert, und zwar sowohl

- für $x \to \pm\infty$, falls D unbeschränkt ist, als auch
- für $y \to \pm\infty$, falls Bild unbeschränkt ist

Asymptoten

sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ eine F.

1. $x = x_0$ ist vert. Asymptote zu f, falls $\lim_{x \searrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\}$ oder $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\}$
2. F. $f_a: D_a \to \mathbb{R}$, $D_a \subseteq \mathbb{R}$ ist (nicht-vert.) Asymptote zu f, falls $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - f_a(x)) = 0$ oder $\lim_{x \to \infty} (f(x) - f_a(x)) = 0$

Bemerkungen:

- Weil i. A. unendlich viele Funktionen f_a infrage kommen, beschränkt man sich üblicherweise auf "einfache" Funktionen, z. B. Polynomfunktionen
- vertikale und horizontale $f_a \equiv$ const. heissen gerade Asymptoten

Asymptoten für rationale Funktionen

sei $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ eine rationale F.

1. für jede Nullstelle x_0 von N mit $Z(x_0) \neq 0$ ist $x = x_0$ eine vert. A.
2. sei $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{N(x)}$ mit $\deg(r) < \deg(N)$ die Zerlegung in ganzr. Anteil q und echt gebrochenr. Anteil $\frac{r}{N}$. dann ist $f_a(x) = q(x)$ eine Asymptote zu f. sie ist horizontal genau dann, wenn $\deg(q) = 0$.

Regel von de L'Hospital

sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ diff'bare Funktionen. sei $x_0 \in I$ und es gelten entweder $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$. falls $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert, so gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

→ kann manchmal auch für Zahlenfolgen angewendet werden, denn $\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{x \to \infty} f(x)$ (Punkte $(n, f(n))$, $n \in \mathbb{N}$ liegen alle auf G_f)

Bemerkungen: · folgt aus erw. Mittelwertsatz
· gilt auch für uneigentliche Intervallgrenzen $x_0 = \pm\infty$

Schnittstellen Graph mit Achsen

Bestimmung d. Schnittpunkte d. Graphen einer F. mit den Koordinatenachsen ist ein weiteres Thema d. Kurvendiskussion

→ dafür müssen Gleichungen gelöst werden (Kapitel 6)

Nichtlineare Gleichungen

LAI → $Ax = b$
ANI → i. A. nichtlineare skalare Gleichungen für 1 reelle Unbekannte

Lösen von skalaren Gl. für 1 r. Unb. ist äquivalent zum Bestimmen von Nullstellen von reellwertigen F. einer r. Var.

(Bestimmungs-)Gleichung, Lösung(smenge), Äquivalenz

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, eine Funktion. Für jedes $x \in D$ ist $f(x) = 0$ eine Aussage.

- Bestimmungsgleichung für $x \in D$: $f(x) = 0$
- Lösung d. Gl. $f(x) = 0$: $x \in D$ falls $f(x) = 0$ wahre Aussage
- Lösungsmenge d. Gl. $f(x) = 0$: $L = \{x \in D \mid f(x) = 0\} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ (Menge aller Lsg)
- Äquivalenz von Gleichungen: Gleichungen haben gleiche Lösungsmenge

Näherungsweise grafische Lösung

Da G_f einer F. $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ immer als Kurve in Ebene dargestellt werden kann, und weil man solche Kurven mit einem F.plotter schnell und genau darstellen kann, lassen sich Lsg von Gleichungen näherungsweise grafisch bestimmen.

Solche Näherungen können als Startwerte für numerische Lösungsmethoden verwendet werden, mit denen Nullstellen näherungsweise, aber mit hoher Genauigkeit (z. B. auf eine vorgegebene Anzahl sign. Stellen) bestimmt werden können.

Analytische Lösungsmethoden

Anwendung einer bijektiven F. auf beiden Seiten einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung:

Seien $f: D_f \to \mathbb{R}$ und $g: D_g \to \mathbb{R}$, $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$, Funktionen, und $\mathrm{im}(f) \subseteq D_g$. g sei bijektiv.

Dann sind die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(f(x)) = g(0)$ äquivalent.

Algebraische Gleichungen (Gleichung der Form $p(x) = 0$, p Polynomfunktion)

Lineare Gleichungen $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ → LAI

$$L = \begin{cases} \emptyset & a = 0,\ b \neq 0 \\ \{-\frac{b}{a}\} & a \neq 0 \\ \mathbb{R} & a = b = 0 \end{cases}$$

Potenzgleichungen $x^n = a$, $n \in \mathbb{N}$

$$L = \begin{cases} \{\sqrt[n]{a}\} & n \text{ ungerade} \\ \emptyset & n \text{ gerade},\ a < 0 \\ \{0\} & n \text{ gerade},\ a = 0 \\ \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\} & n \text{ gerade},\ a > 0 \end{cases}$$

Quadratische Gleichungen $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$L = \begin{cases} \emptyset & D<0 \\ \left\{\frac{-b}{2a}\right\} & D=0 \\ \left\{\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right\} & D>0 \end{cases}$$

Algebraische Gleichungen höherer Ordnung

kubische, quartische → allgemeine Lösungsformel (kompliziert)

$\deg p \geq 5$ → keine allg. Lösungsf. mit Wurzelausdrücken (Satz von Abel-Ruffini)

→ spezielle Gleichungen (z.B. Potenzgl.) können noch mit Wurzelausdr. gelöst werden (→ Galoistheorie)

In jedem Fall kann man bei alg. Gl. den Polynomgrad durch Absp. eines Lin.faktors verkleinern, wenn eine Nullstelle gefunden wurde.

Für nicht-algebraische Gl. gibt es derart viele Möglichkeiten, dass wir keine allgemeine Lösungsformeln mehr angeben können. Es folgen einige Methoden, die sich für die Lösung d. jeweiligen Gleichungen bewährt haben.

Bruchgleichungen

Eine Bruchgleichung enthält mindestens einen Bruchterm, bei dem die Unbekannte x im Nenner steht.

Indem man alle Ausdrücke auf Hauptnenner bringt, erhält man eine Gleichung der Form $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Die Lösungen sind im Prinzip die Nullstellen des Zählers $f(x)$, jedoch müssen die Nullstellen des Nenners ausgeschlossen werden, weil an diesen der Ausdruck auf der linken Seite nicht definiert ist. Wir multiplizieren also beide Seiten der Gleichung mit $g(x)$, und dies ist eine Äquivalenzumformung genau dann, wenn $g(x) \neq 0$ gilt.

Wenn f und g Polynomfunktionen sind, so können wir die Lösungsmethoden für algebraische Gleichungen aus Kap. 6.3.1 anwenden, um ihre Nullstellen zu bestimmen.

Wurzelgleichungen

Bei einer Wurzelgleichung steht die Unbekannte mindestens einmal unter einer Wurzel.

- n-te Wurzeln können wir isolieren und dann auf beiden Seiten die n-te Potenz anwenden, um sie zu eliminieren. Dabei ist zu beachten dass
- beim Potenzieren mit geraden Zahlen sog. *Scheinlösungen* hinzukommen können, die keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind!

Bei Lösungen von Wurzelgleichungen sollten Sie daher *die Probe machen,* d. h. Ihre Lösungen überprüfen.

Betragsgleichungen

Betragsgleichungen können wegen $|x| = \sqrt{x^2}$ als Wurzelgleichungen aufgefasst werden.

- Wir können also Beträge isolieren und beide Seiten der Gleichung quadrieren, um sie zu eliminieren. Dabei können wieder Scheinlösungen hinzukommen!

Eine andere Möglichkeit zur Lösung von Betragsgleichungen ist die Verwendung einer Fallunterscheidung.

Exponential- und Logarithmusgleichungen

Bei Exponentialgleichungen steht die Unbekannte x mindestens einmal in einem Exponenten, und bei Logarithmusgleichungen steht sie mindestens einmal im Argument eines Logarithmus. Für diese Gleichungen verwendet man

- die Potenz- bzw. Logarithmengesetze (Sätze 1 und 17), um Terme mit gleichen Basen zu isolieren und
- am Ende *elementare Exponential- oder Logarithmusgleichungen* der Form $a^x = b$ oder $\log_b(x) = a$ zu erhalten, die man durch Anwenden der Umkehrfunktionen äquivalent umformen kann.

Trigonometrische Gleichungen

Bei trigonometrischen Gleichungen steht die Unbekannte mindestens einmal im Argument einer trigonometrischen Funktion.

> Diese Gleichungen versucht man durch Umformen z. B. mithilfe der Additionstheoreme (Satz 27, 5.) oder Substitution auf eine elementare Form $\sin(x) = a$ oder $\cos(x) = a$ zu bringen, und dann durch Anwenden der Arkusfunktionen zu lösen.

Dabei ist zu beachten, dass die trigonometrischen Funktionen periodisch sind. Trigonometrische Gleichungen haben daher i. A. unendlich viele Lösungen.

Gleichungen mit Hyperbelfunktionen

Bei diesen Gleichungen steht die Unbekannte mindestens einmal im Argument einer Hyperbelfunktion.

> Diese Gleichungen versucht man durch Umformen oder Substitution auf eine elementare Form $\sinh(x) = a$ oder $\cosh(x) = a$ zu bringen, und dann durch Anwenden der Areafunktionen zu lösen.

Numerische Lösungsmethoden → NUM

$f(x)=0$, $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

wir setzen Existenz (mind.) einer Lösung voraus: $\exists x \in D: f(x)=0$

$\tilde{x} \in \mathbb{R}$, $\tilde{x} \simeq x$: Näherung an Lösung x

$\tilde{x} - x \in \mathbb{R}$: Fehler der Näherung

$f(\tilde{x}) \in \mathbb{R}$: Residuum (falls $\tilde{x} \in D$ gilt)

wir können Fehler i.A. nicht berechnen, da wir x nicht kennen
→ in Numerik versucht man Abschätzungen für Fehler zu erhalten

Residuum lässt sich berechnen, falls $\tilde{x} \in D$

es folgen Methoden zur Konstruktion einer Folge $\langle x_n \rangle$ (ausgehend von Startwert x_0), welche unter gewissen Voraussetzungen gegen eine Lsg d. Gleichung konvergiert:
$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ mit $f(x^*)=0$

in ungünstigen Fällen kann die konstruierte Folge jedoch auch divergieren

damit ein numerisches Verfahren nach endlich vielen Schritten beendet wird verwendet man in der Praxis ein Abbruchkriterium, z.B. $f(x_n) \le tol$, mit einer vorgegebenen Fehlerschranke $tol > 0$

ausserdem gibt man typischerweise eine maximale Anzahl von $N \in \mathbb{N}$ Schritten vor

Bisektion

Als Pseudocode lässt sich die Bisektion wie folgt beschreiben:

Eingabe: Intervallgrenzen a, b mit $a < b$ und $f(a)f(b) < 0$ (Voraussetzung: f stetig in $[a, b]$), Fehlerschranke tol > 0 für das Residuum

$y_a = f(a)$, $c = \dfrac{a+b}{2}$, $y_c = f(c)$

while $|y_c| >$ tol

  if $y_a y_c < 0$

    $b = c$

  else

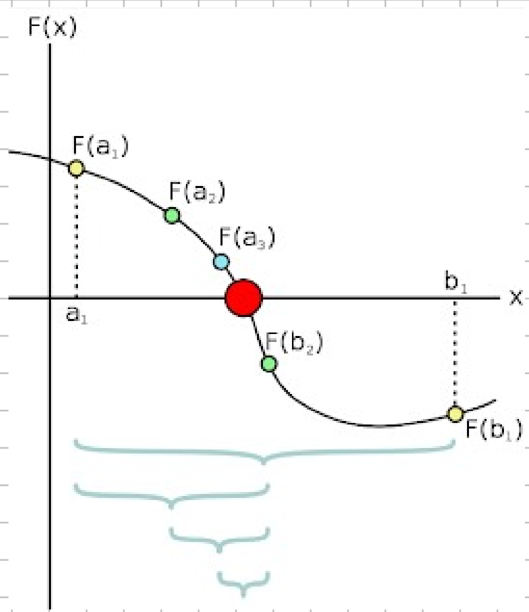
    $a = c$, $y_a = y_c$

  end

  $c = \dfrac{a+b}{2}$, $y_c = f(c)$

end

Ausgabe: Näherung c einer Lösung mit $|f(c)| \le$ tol.

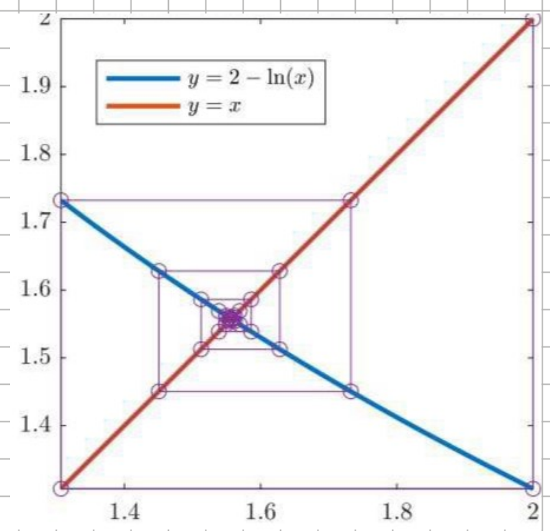


Bemerkung: Falls im Ausgangsintervall *mehrere* Lösungen der Gleichung eingeschlossen sind, so wird sich das Verfahren früher oder später für eine dieser Lösungen "entscheiden", d. h. ab einem gewissen Schritt wird nur noch eine Lösung eingeschlossen sein.

Fixpunktiteration

Wir geben noch einen Pseudocode für die Fixpunktiteration an:

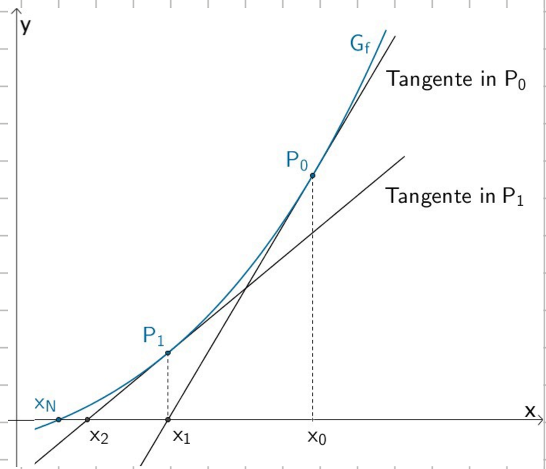
> Eingabe: Startwert x_0 (Voraussetzung: φ differenzierbar zwischen x_0 und $\varphi(x_0)$ mit $|\varphi'(x)| < 1$), Fehlerschranke tol > 0 für das Residuum
>
> $x = x_0$, $y = \varphi(x_0)$
>
> while $|y - x| > \text{tol}$
>
> $x = y$, $y = \varphi(x)$
>
> end
>
> Ausgabe: Näherung x eines Fixpunkts mit $|\varphi(x) - x| \leq \text{tol}$.



Newtonverfahren

Von den drei Verfahren in diesem Kapitel ist dieses das wichtigste. Beim Newtonverfahren (I. Newton, 1669, J. Raphson, 1690) bestimmt man in einem Punkt $(x_n, f(x_0)) \in G_f$ zuerst die Tangente an den Graphen der Funktion f in diesem Punkt und dann den Schnittpunkt dieser Tangente mit der x-Achse:

- Die Tangente ist der Graph des 1. Taylorpolynoms mit Entwicklungsstelle x_n: $T_1 f(x; x_n) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$,
- die Nullstelle der linearen Funktion $T_1 f(x; x_n)$ ist $x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} =: x_{n+1}$, falls $f'(x_n) \neq 0$ gilt (!).



Wir verwenden also beim Newtonverfahren die Folge

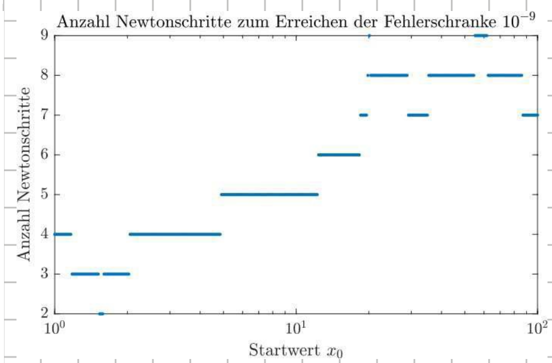
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N},$$

mit einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$. Pseudocode für das Newtonverfahren (Voraussetzung: f differenzierbar, Ableitung f' bekannt):

> Eingabe: Startwert x_0, Fehlerschrankte tol > 0 für das Residuum, maximale Anzahl Iterationen N
>
> $n = 0$ (Zähler für Iterationen), $x = x_0$, $y = f(x_0)$
>
> while $|y| > \text{tol}$ und $n < N$
>
> $n = n + 1$
>
> $x = x - \dfrac{y}{f'(x)}$, $y = f(x)$
>
> Ausgabe: Näherung x einer Lösung mit $|f(x)| \leq \text{tol}$, falls $n < N$.

<u>Bemerkungen:</u>

- Beim Newtonverfahren müssen in jedem Schritt zwei Funktionen ausgewertet werden (f und f'), während bei der Bisektion und bei der Fixpunktiteration in jedem Schritt nur eine Funktionsauswertung nötig ist.
- Dennoch ist das Newtonverfahren sehr beliebt, weil es *lokal quadratisch* konvergiert, d. h. wenn der Startwert genügend nahe an einer Nullstelle liegt, so ist die Konvergenz des Newtonverfahrens quadratisch ($p = 2$) und damit sehr schnell. Allerdings ist "genügend nahe" problemabhängig und kann nicht a priori entschieden werden. Im Fall eines Misserfolgs versucht man in der Praxis einfach einen anderen Startwert!



- Für das Newtonverfahren muss die Ableitung f' bekannt sein. Im Fall $|f'(x_{n-1})| \simeq 0$ kann es passieren, dass x_n nicht mehr im Definitionsbereich der Funktion f liegt, woraufhin das Verfahren zusammenbricht. In diesem Fall hilft meist wieder eine Wiederholung mit einem anderen Startwert.

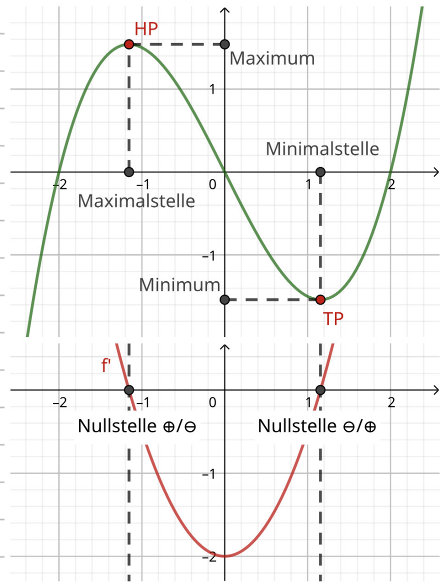
Optimierung

$\max_{x \in S} f(x) = \max(\{ f(x) \mid x \in S \})$

$f'(x) \stackrel{!}{=} 0$

Randpunkte separat betrachten

Schlupfvariable = Überschussvariable



Vorgehensweise:

1. Variablen einführen.
2. Hauptbedingung und Nebenbedingungen formulieren.
3. Mithilfe der Nebenbedingungen alle Variablen bis auf eine eliminieren. Damit erhalten wir die Zielfunktion f.
4. Aus den Nebenbedingungen die zulässige Menge S für die Zielfunktion aus 3. bestimmen.
5. Kritische Punkte der Zielfunktion f ermitteln.
6. f an den zulässigen kritischen Punkten auswerten und mit den Funktionswerten an den Randpunkten von S vergleichen, um Extremwerte zu finden.

Integralrechnung

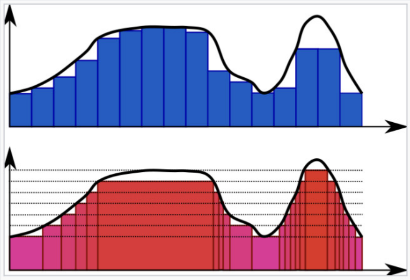


Abbildung 1: Illustration der Grenzwertbildung beim Riemann-Integral (blau) und beim Lebesgue-Integral (rot)

↳ äquivalent zu Darboux ↳ nicht Äquivalent zu Darboux

Stammfunktion

diffbare Funktion $F: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, heisst Stammfunktion von $f: D \to \mathbb{R}$, wenn $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in D$

Aussagen zu Stammfunktionen

- Stetigkeit ist hinreichend aber nicht notwendig für Existenz einer Stammfunktion
- notwendig (aber nicht hinreichend) für Existenz einer Stammfunktion: f nimmt auf $[a, b]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an (vgl. Zwischenwertsatz)
- wenn f eine St.f. F besitzt und D ein Intervall ist $\Rightarrow F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ sind alle St.f. von f
  ↳ besteht D hingegen aus disjunkten Intervallen, so kann man auch lokal konstante Funktionen zu F addieren

unbestimmtes Integral

sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Menge aller Stammfunktionen von f ist gegeben durch

$$\int f(x)\,dx := \{F: D \to \mathbb{R} \mid F \text{ ist Stammfunktion von } f\}$$ Menge von Funktionen

bestimmtes Integral

sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Bestimmte Integral der Funktion f über Intervall $[a, b]$ $\int_a^b f(x)\,dt \in \mathbb{R}$ ist reelle Zahl gegeben durch Fläche zwischen Graph von f und x-Achse.

Flächenfunktion

sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Funktion $I[f](\cdot\,; a): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto I[f](x; a) := \int_a^x f(t)\,dt$ heisst Flächenfunktion.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Berechnung bestimmtes Integral

1. Bestimmen irgendeiner Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b \in \mathbb{R}$

Beschränktheit von Funktionen

f heisst beschränkt auf M, falls Bild von M unter f, also $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist

$\inf_{x \in M} f(x) := \inf(f(M))$, $\sup_{x \in M} f(x) := \sup(f(M))$

Bem: nach Satz von Minimum und Maximum ist stetige Funktion beschränkt auf jedem abgeschl. Intervall $[a,b] \subseteq D$

Integrierbarkeit / best. Integral

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ sei beschr. auf $[a,b] \subseteq D$

$Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$O[f](Z) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x_{k-1} < x < x_k} f(x) \in \mathbb{R}$$
$$U[f](Z) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{x_{k-1} < x < x_k} f(x) \in \mathbb{R}$$
$\vee\!/$

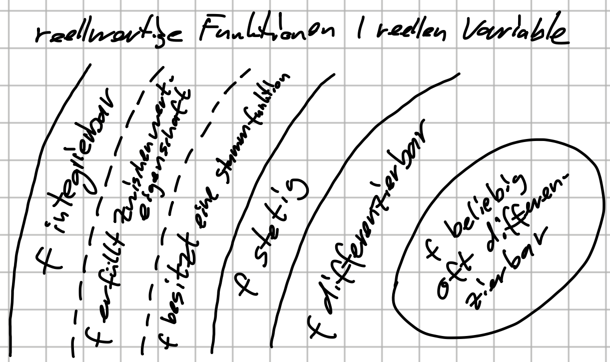
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{O[f]Z \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \in \mathbb{R}$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{U[f]Z \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \in \mathbb{R}$$
$\vee\!/$

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, die auf $[a,b] \subseteq$ beschränkt ist, heisst (Darboux-)integrierbar auf $[a,b]$, wenn $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. Der Wert heisst dann das bestimmte (Darboux-)Integral von f über dem Intervall $[a,b]$, symbolisch $\int_a^b f(x)dx$

Bemerkungen:

- gibt weitere (äquivalente) Integralbegriffe, z.B. das Riemann-Integral
- Funktionen, die stetig sind bis auf abzählbar viele Sprungstellen sind integrierbar (z.B. Rechteckfunktion)

- f integrierbar <= f stetig
  - <= f diff'bar <= f stetig diff'bar
  - <= f 2-mal diff'bar <= f 2-mal stetig diff'bar
  - <= f 3-mal diff'bar <= ...
  - <= f beliebig oft differenzierbar



Integralfunktion, unbest. Integral

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, eine Funktion und $[a, b]$ ein abgeschl. Intervall. f sei integrierbar auf jedem Teilintervall $[a, x]$, $x \in (a, b]$. Dann heisst $I[f](\cdot; a): [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto I[f](x; a) := \int_a^x f(t)dt$, $x \geq a$, eine Integralfunktion von f. Die Menge aller Integralfunktionen wird mit $\int f(x)dx$ bezeichnet. Diesen Ausdruck nennt man auch das unbestimmte Integral der Funktion f.

Bemerkungen:

- da $a \in D$ beliebig => zu jeder integrierbaren Funktion gibt es unendlich viele Integralfunktion
- 2 beliebige Integralfunktionen unterscheiden sich durch additive Konstante. Es gilt: $I[f](x; a_1) - I[f](x; a_2) = \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt \in \mathbb{R}$, $x \in D$. Daraus folgt $\int_{a_1}^{a_2} f(t)dt = -\int_{a_2}^{a_1} f(t)dt$.
- bestimmte Integral ist Zahl, Integralfunktion/Flächenfunktion ist Funktion, unbest. Integral ist Menge von Funktionen

Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1. $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$ (Integralfunktion ist eine Stammfunktion)

2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$ (Newton-Leibniz-Formel)

Weil für stetige Funktionen jede Flächenfunktion eine Stammfunktion ist, können wir die Menge aller Flächenfunktionen schreiben als $\int f(x)dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$, wobei F irgendeine Stammfunktion von f bezeichnet. Dabei werden die Mengenklammern üblicherweise weggelassen.

Somit erhalten wir für stetig differenzierbare elementare Funktionen f die sog. Grund- oder Stammintegrale der Form $\int f'(x)dx = f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

Grund- oder Stammintegrale

$$\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

$$\int 0 \, \mathrm{d}x = C$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, \quad a > 0, \; a \neq 1$$

$$\int \exp(x) \, \mathrm{d}x = \exp(x) + C$$

$$\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

$$\int \sec^2(x) \, \mathrm{d}x = \tan(x) + C$$

$$\int \csc(x)\cot(x) \, \mathrm{d}x = -\csc(x) + C$$

$$\int \sec(x)\tan(x) \, \mathrm{d}x = \sec(x) + C$$

$$\int \csc^2(x) \, \mathrm{d}x = -\cot(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin(x) + C = -\arccos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan(x) + C = -\operatorname{arccot}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arcsec}(x) + C = -\operatorname{arccsc}(x) + C$$

$$\int \cosh(x) \, \mathrm{d}x = \sinh(x) + C$$

$$\int \sinh(x) \, \mathrm{d}x = \cosh(x) + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2(x) \, \mathrm{d}x = \tanh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(x) + C$$

$$\int \operatorname{csch}(x)\coth(x) \, \mathrm{d}x = -\operatorname{csch}(x) + C$$

$$\int \operatorname{sech}(x)\tanh(x) \, \mathrm{d}x = -\operatorname{sech}(x) + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2(x) \, \mathrm{d}x = -\coth(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arcosh}(x), & x > 1 \\ -\operatorname{arcosh}(-x), & x < -1 \end{cases} + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{artanh}(x), & |x| < 1 \\ \operatorname{arcoth}(x), & |x| > 1 \end{cases} + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{arsech}|x| + C$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{arcsch}(x) + C$$

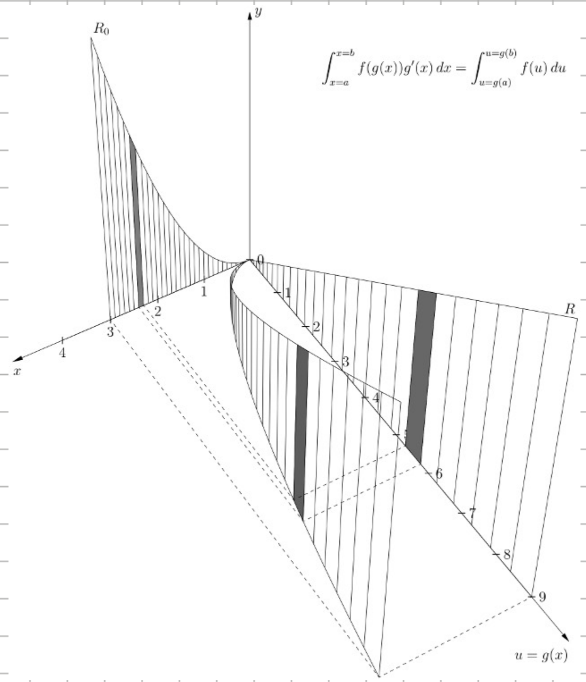
Bei komplizierten Integralen versuchen, diese auf Grundintegrale zurückzuführen! Dazu sind Faktor- und Summenregel nützlich, aber insbesondere auch die Methoden der Integration durch Substitution und der partiellen Integration.

Elementare Integrationsregeln

Seien f und g stetige Funktionen, dann gelten

1. Faktorregel: $\int c\, f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx, \quad c \neq 0$
2. Summenregel: $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
3. Vertauschungsregel: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
4. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad c \in [a,b]$

Integration durch Substitution



für diff'bare und umkehrbare Funktion g gilt

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} u = g(x) \\ x = g^{-1}(u) \end{matrix} \right| = \int f(g^{-1}(u)) \frac{d(g^{-1})}{du} du$$

wobei nach Integration entweder links $x = g^{-1}(u)$ oder rechts $u = \varphi(x)$ zu setzen ist

bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x(u)) \frac{dx}{du} du$$

Partielle Integration

für stetig diff'bare Funktionen u, v gilt

$$(uv)' = u'v + uv' \iff$$

$$uv' = (uv)' - u'v \iff$$

$$\int uv'dx = uv - \int u'v dx$$

bestimmtes Integral:

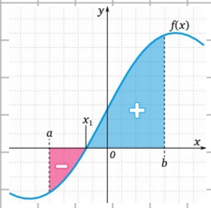
$$\int_a^b uv'dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u'v dx$$

Integration rationaler Funktionen mittels Partialbruchzerlegung

$$f(x) = p(x) + \frac{Z(x)}{N(x)} = p(x) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{r=1}^{j_i} \frac{A_{ir}}{(x-x_i)^r} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{k_i} \frac{B_{ir}x + C_{ir}}{(x^2 + b_i x + c_i)^r}$$

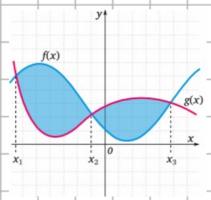
$$\int f(x)dx = \int p(x)dx + \sum_{i=1}^{l} \sum_{r=1}^{j_i} \int \frac{A_{ir}}{(x-x_i)^r} dx + \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{k_i} \int \frac{B_{ir}x + C_{ir}}{(x^2 + b_i x + c_i)^r} dx$$

geometrische Anwendungen



Fläche zwischen einer Kurve und x-Achse

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

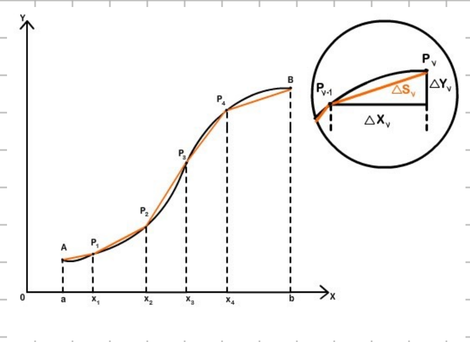


Fläche zw. Graphen von 2 Funktionen

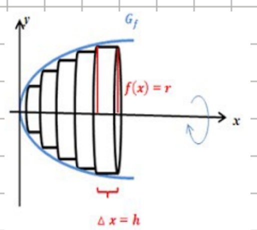
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Bogenlänge Kurve

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\| \begin{pmatrix} x_k - x_{k-1} \\ f(x_k) - f(x_{k-1}) \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \end{aligned}$$



Rotationskörper



Volumen bei Rotation um x-Achse: $V_x = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$

Volumen bei Rotation um y-Achse: $V_y = \pi \int_a^b x^2 |f'(x)|\,dx$

Mantelfläche bei Rotation um x-Achse: $M_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

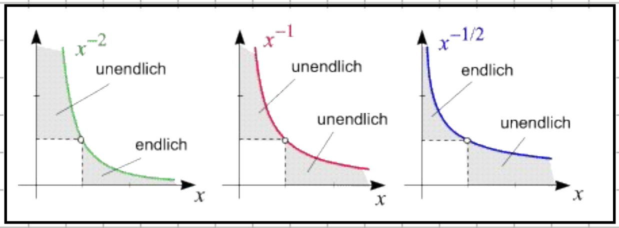
Mantelfläche bei Rotation um y-Achse: $M_y = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

parameterabhängige Integrationsgrenzen

$$I(a) = \int_{g_u(a)}^{g_o(a)} f(x)\,dx = F(g_o(a)) - F(g_u(a)) \Rightarrow I'(a) \overset{F'=f}{=} f(g_o(a))\,g_o'(a) - f(g_u(a))\,g_u'(a)$$

→ dieser Zusammenhang kann bspw. bei der Bestimmung von Extrema von $I(a)$ nützlich sein

Uneigentliche Integrale



Integrand mit Unendlichkeitsstelle:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda \searrow 0} \int_a^{b-\lambda} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda \searrow 0} \int_a^{b-\lambda} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda_u \searrow 0} \int_a^{c-\lambda_u} f(x)dx + \lim_{\lambda_o \searrow 0} \int_{c+\lambda_o}^b f(x)dx$$

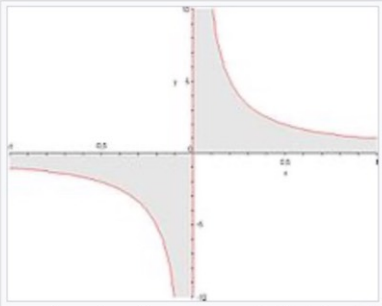
Unbeschränktes Integrationsgebiet:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^\lambda f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda \to -\infty} \int_\lambda^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{\lambda_u \to -\infty} \int_{\lambda_u}^c f(x)dx + \lim_{\lambda_o \to \infty} \int_c^{\lambda_o} f(x)dx$$

Cauchyscher Hauptwert (CH)



cauchyscher Hauptwert – Beispiel

Integrand mit Unendlichkeitsstelle:

$$CH \int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda \searrow 0} \left(\int_a^{c-\lambda} f(x)dx + \int_{c+\lambda}^b f(x)dx \right)$$

Unbeschränktes Integrationsgebiet:

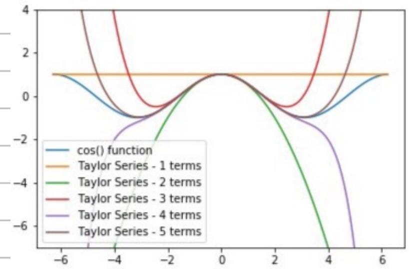
$$CH \int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^\lambda f(x)\,dx$$

Substitution i.A. nicht erlaubt !

uneigentliches Integral existiert in $\overline{\mathbb{R}}$ $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ CH existiert in $\overline{\mathbb{R}}$

Potenzreihen

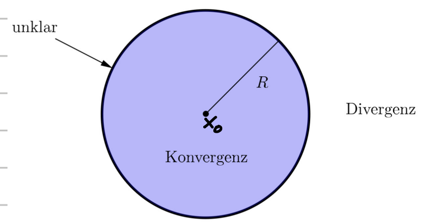
Definition, Konvergenzbereich



Potenzreihe:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Konvergenzradius:



$$r := \sup\{|x-x_0| \mid P(x) \text{ konvergent}\} \in \overline{\mathbb{R}}_0^+$$

$$\boxed{r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

für $|x-x_0| = r$ muss Konvergenz gesondert untersucht werden

Eigenschaften

1. Summe: $\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)(x-x_0)^n$
2. Produkt: $P_1(x) P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(x-x_0)^n$ Cauchy-Produktformel

   → innere Summe heisst diskrete Faltung der Vektoren $(a_0, \dots, a_n)^T$ und $(b_0, \dots, b_n)^T$ → tritt auch in der digitalen Signalverarbeitung auf
3. Ableitung: $P^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-x_0)^{n-k}$
4. Integral: $\int P(x)\,dx = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + C$

aus 1. folgt dass alle Potenzreihen mit Entwicklungsstelle x_0 und Konvergenzradius $\geq r$ einen (unendlichdimensionalen) Vektorraum bilden

Taylorreihe

$$Tf(x;x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Potenzreihe mit $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

analytische Funktion: f stimmt auf ganzem Konvergenzradius mit Tf überein

f analytisch $\Rightarrow$ f glatt

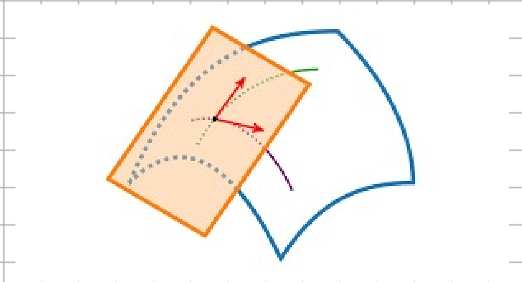
Funktion	Taylorreihe	Konvergenzbereich
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$ $[-1,1]$, $\alpha \notin \mathbb{N}_0, \alpha > 0$ $(-1,1]$, $-1 < \alpha < 0$ $(-1,1)$, $\alpha \leq -1$
$\exp(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$	$(0,2]$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$[-1,1]$
$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$(-1,1)$

Restglied (Taylor-Formel)

$$R_n(x;x_0) = f(x) - T_n f(x;x_0)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad t \in (0,1)$$

Mehrdimensionale Differenzialrechnung



Taylorpolynome

1. Taylorp: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\underbrace{T_1 \vec{f}(\vec{x};\vec{x}_0)}_{m} = \underbrace{\vec{f}(\vec{x}_0)}_{m} + \underbrace{\vec{f}\,'(\vec{x}_0)}_{m\times n} \cdot \underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{n}$$

2. Taylorp: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{T_2 f(\vec{x};\vec{x}_0)}_{1\times 1} = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{1\times 1} + \underbrace{\nabla f(\vec{x}_0)^T}_{1\times n} \underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{n\times 1} + \frac{1}{2} \underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)^T}_{1\times n} \underbrace{\underline{Hf}(\vec{x}_0)}_{n\times n} \underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{n\times 1}$$

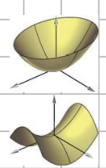
k. Taylorp: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$T_k f(\vec{x};\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)(x_i - x_{0i}) + \dots + \sum_{m_1+\dots+m_n=k} \frac{1}{m_1!\cdots m_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}(\vec{x}_0)(x_1-x_{10})^{m_1}\cdots(x_n-x_{n0})^{m_n}$$

kritische Punkte

1. $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \Rightarrow$ stationärer Punkt
2. $\underline{Hf}(\vec{x}_0)$ Eigenwerte

alle positiv $\Rightarrow$ Minimum
alle negativ $\Rightarrow$ Maximum
pos. & neg. $\Rightarrow$ Sattelp.



Eigenwerte bestimmen

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbb{K}^{n\times n}: & \det(\lambda \cdot E_n - A) = 0 \\ \mathbb{R}^{2\times 2}: & \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\operatorname{tr}(A))^2 - \det(A)} \end{array}}$$

Ableitungsregeln

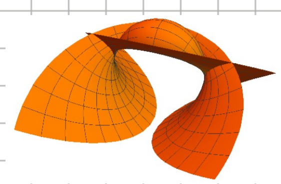
- stetig partiell diff'bar $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ total diff'bar $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ partiell diff'bar
- Linearität: $\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial \vec{v}}, \underline{D}^k, \nabla, \Delta, \operatorname{div}, \operatorname{rot}\right\}$ sind alle linear
- Produktregeln:
  1. $\nabla(fg) = \nabla f\, g + f \nabla g$
  2. $\operatorname{div}(f\vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f \operatorname{div}\vec{v}$
  3. $\operatorname{rot}(f\vec{v}) = \nabla f \times \vec{v} + f \operatorname{rot}\vec{v}$
- Kettenregel: $\underbrace{\underline{D}(\vec{f}\circ\vec{g})}_{m\times n} = \underbrace{(\underline{D}\vec{f}\circ\vec{g})}_{m\times p} \underbrace{\underline{D}\vec{g}}_{p\times n}$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\vec{g}} \mathbb{R}^p \xrightarrow{\vec{f}} \mathbb{R}^m$$
$$\vec{x} \mapsto \vec{g}(\vec{x}) \mapsto \vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))$$

Verknüpfung Differenzialoperatoren

1. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$
2. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{0}_3$
3. $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$
4. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \vec{\Delta} \vec{v}$

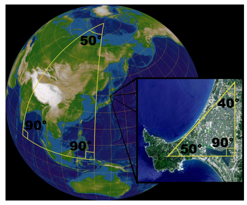
Differenzialgeometrie



Immersion

$\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\text{rang}(\underline{D\vec{F}}(\vec{x})) = n \quad \forall n \in D$

Jacobi hat maximalen Rang für alle $\vec{x}$ aus dem Definitionsbereich
- → kann nur für $m \geq n$ erfüllt sein
- → stellt sicher, dass $\underline{D\vec{F}}(\vec{x})\,\vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ an jeder Stelle $\vec{x}$ ein n-dimensionaler Unterraum (Tangentialraum) des $\mathbb{R}^m$ ist



Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein geometrisches Objekt (genauer: ein topologischer Raum), der lokal so aussieht wie der n-dimensionale reelle Raum. Das klassische Beispiel, das auch die Terminologie motiviert, ist die Erdoberfläche. In kleinen Ausschnitten lässt sie sich durch Karten beschreiben, das heißt kleine Teile „sehen aus wie“ die Ebene. Jedoch lässt sich die gesamte Erdoberfläche nicht mit der Ebene identifizieren. Außerdem tragen differenzierbare Mannigfaltigkeiten eine Struktur, die es erlaubt, von differenzierbaren Funktionen zu sprechen. Diese differenzierbare Struktur ermöglicht es, in den Karten lokal analytische Methoden anzuwenden.

Bild einer Immersion $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$S = \text{im}(\vec{F}) = \vec{F}(D) = \{\vec{F}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in D\} \subseteq \mathbb{R}^m$

ist immersierte Mannigfaltigkeit der Dimension n im $\mathbb{R}^m$

- reguläre Kurve: $n = 1$, $m \geq 2$ — häufig: $m=3$ oder $m=2$, $n=1$
- reguläre Fläche: $n > 1$, $m - n = 1$ — häufig: $m=3$, $n=2$

Immersion $\vec{F}$ heisst reguläre Parameterdarstellung von $S = \text{im}(\vec{F})$
- → nicht eindeutig
- → falls injektiv ⇒ schneidet sich nicht mit sich selbst

Graph einer Funktion $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^{n+m} \\ \vec{x} &\mapsto \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{f}(\vec{x}) \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{Bild dieser Funktion ist der Graph}$$

wegen $\text{rang}\left(\underline{D\vec{F}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} E_n \\ \underline{D\vec{f}}(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times n}\right) = n$ ist $\vec{F}$ eine Immersion und reguläre Parameterdarstellung von $\vec{f}$:

$\text{graph}(\vec{f}) = \text{im}(\vec{F}) = \vec{F}(D) = \{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \mid \vec{x} \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

ist injektiv immersierte Mannigfaltigkeit d. Dimension n in $\mathbb{R}^{n+m}$

Niveaumenge einer Funktion $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$N_{\vec{f}}(\vec{c}) = \vec{f}^{-1}(\{\vec{c}\}) = \{\vec{x} \in D \mid \vec{f}(\vec{x}) = \vec{c}\} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ — Lösungsmenge d. GS $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{c}$

ist injektiv immersierte Mannigfaltigkeit d. Dimension $n-m$ in $\mathbb{R}^n$ falls $\vec{c}$ ein regulärer Punkt ist

regulärer Punkt $\vec{a}$ von $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{a} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\underbrace{\text{rang}(D\vec{f}(\vec{a})) = m}_{\text{nur für } m \leq n \text{ erfüllbar}}$, andernfalls ist $\vec{a}$ ein kritischer Punkt

→ in regulärem Punkt ist das (totale) Differenzial $L_{\vec{a}}$ von $\vec{f}$ surjektiv

kritischer Wert $\vec{c}$ von $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ falls $N_{\vec{f}}(\vec{c}) \subseteq$ einen kritischen Punkt enthält

Tangentialraum, Normalraum von $\vec{p} = \vec{f}(\vec{a}) \in S$

$T_{\vec{p}}S = im(\underline{D}\vec{f}(\vec{a})) = \{ \underline{D}\vec{f}(\vec{a})\vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$ Spaltenraum d. Jak.-M n-dim, lin. Unterraum von $\mathbb{R}^m$

$N_{\vec{p}}S = T_{\vec{p}}S^{\perp} = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \langle \vec{y}, \vec{t} \rangle = 0 \ \forall \vec{t} \in T_{\vec{p}}S \} \subseteq \mathbb{R}^m$ Linksnullraum d. Jak.-M (m-n)-dim, lin. Unterraum von $\mathbb{R}^m$

Basis bestimmen:

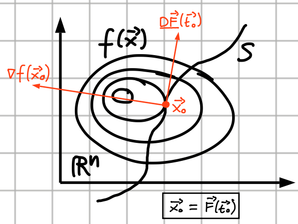
- Bild von $\vec{f}$, $m \geq n$: $\underset{n}{T_{\vec{p}}S} \to$ Spalten $\underline{D}\vec{f}(\vec{a})$, $\underset{m-n}{N_{\vec{p}}S} \to$ orth. Komplement
- Graph von $\vec{f}$: $\underset{n}{T_{\vec{p}}S} \to$ Spalten $\begin{pmatrix} \underline{I}_n \\ \underline{D}\vec{f}(\vec{a}) \end{pmatrix}$, $\underset{m}{N_{\vec{p}}S} \to$ Spalten $\begin{pmatrix} -\underline{D}\vec{f}(\vec{a})^T \\ \underline{I}_m \end{pmatrix}$
- Niv.m. von $\vec{f}$, $m \leq n$: $\underset{m}{N_{\vec{p}}S} \to$ Spalten $\underline{D}\vec{f}(\vec{a})^T$, $\underset{n-m}{T_{\vec{p}}S} \to$ orth. Komplement

orthogonales Komplement $U^{\perp}$ von $U = span(\{v_1, \dots, v_k\}) \subseteq \mathbb{R}^n$

Lösungsmenge d. LGS: $\begin{pmatrix} - & v_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & v_k^T & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}_k$

$dim(U) + dim(U^{\perp}) = k + (n-k) = n$

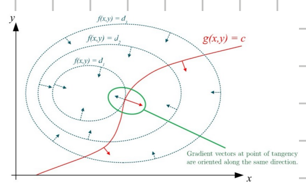
bedingte Extrema von Skalarfeldern finden



Gegeben: 2 Funktionen: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \leq n$

Gesucht: lokale Extrema von f auf einer Niveaumenge $S = N_{\vec{g}}(\vec{c})$ von $\vec{g}$

1. Parameterdarstellung von S: $\vec{F}: \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{t} \mapsto \vec{F}(\vec{t})$
2. $\nabla(f \circ \vec{F})(\vec{t}_0)^T = \underline{D}f(\vec{F}(\vec{t}_0))\underline{D}\vec{F}(\vec{t}_0) = \nabla f(\vec{F}(\vec{t}_0))^T \underline{D}\vec{F}(\vec{t}_0) \overset{!}{=} \vec{0}_{n-m}^T$ Bedingung für Extremum
3. Da Spalten von $\underline{D}\vec{F}(\vec{t}_0)$ eine Basis des (n-m)-dim. $T_{\vec{x}_0}S$ von S bilden
   $\Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0)$ ist Element des m-dim. $N_{\vec{x}_0}S$
4. Gradienten d. Komponentenfunktionen $\nabla g_i(\vec{x}_0)$ bilden eine Basis von $N_{\vec{x}_0}S$
   $\Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0)$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\nabla g_i(\vec{x}_0)$ darstellen:
   $\underset{n\times 1}{\nabla f(\vec{x}_0)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{0,i} \underset{n\times 1}{\nabla g_i(\vec{x}_0)} = \underset{n\times m}{\underline{D}\vec{g}(\vec{x}_0)^T} \underset{m\times 1}{\vec{\lambda}_0}$ $\begin{bmatrix} \nabla g_1 & \cdots & \nabla g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{0,1} \\ \vdots \\ \lambda_{0,m} \end{bmatrix}$ $\boxed{\vec{\lambda}_0: \text{Lagrange-Multiplikator}}$
5. Gleichzeitig muss $\vec{x}_0 \in S$ gelten $\Rightarrow \vec{g}(\vec{x}_0) = \vec{c}$
6. Lagrange-Funktion $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
   $(\vec{x}, \vec{\lambda}) \mapsto L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \vec{\lambda} \cdot (\vec{c} - \vec{g}(\vec{x}))$
7. Gradient von Lagrange-Funktion:
   $\boxed{\nabla L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \begin{pmatrix} \nabla f(\vec{x}) - \underline{D}\vec{g}(\vec{x})^T \vec{\lambda} \\ \vec{c} - \vec{g}(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times 1}}$



8. Gradient muss an Stelle $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ verschwinden, damit Extremum vorliegt
9. Nullstellen von $\nabla L(\vec{x}, \vec{\lambda})$ bestimmen durch d. NLGS $\nabla L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \vec{0}_{n+m}$ mit n+m Gleichungen für n+m Unbekannte, z.B. mit Newtonverfahren

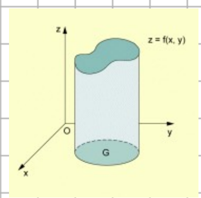
Mehrdimensionale Integralrechnung

geometrische Anwendungen Integralrechnung

Fläche Kurve / x-Achse	$A = \int_a^b \lvert f(x) \rvert \, dx$	$A = \int_\alpha^\beta \lvert y(t)\, \dot{x}(t) \rvert \, dt$
Fläche 2 Funktionen	$A = \int_a^b \lvert f(x) - g(x) \rvert \, dx$	
Bogenlänge Kurve	$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$	$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$
Rotationskörper: Volumen x-Achse	$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$	$V_x = \pi \int_\alpha^\beta y(t)^2 \lvert \dot{x}(t) \rvert \, dt$
Rotationskörper: Volumen y-Achse	$V_y = \pi \int_a^b x^2 \lvert f'(x) \rvert \, dx$	$V_y = \pi \int_\alpha^\beta x(t)^2 \lvert \dot{y}(t) \rvert \, dt$
Rotationskörper: Mantelfläche x-Achse	$M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$	$M_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$
Rotationskörper: Mantelfläche y-Achse	$M_y = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$	$M_y = 2\pi \int_\alpha^\beta x(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$

Gebietsintegral von $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ über $M \subseteq D$

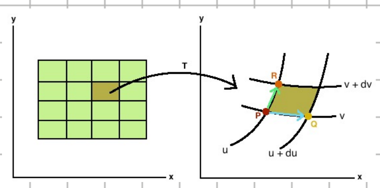
$$\boxed{\int_M f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{a_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \cdots dx_1}$$



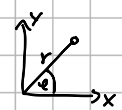
(n+1)-dim. Volumen zw. n-dim $G_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $x_1 \cdots x_n$-Ebene

Transformationssatz

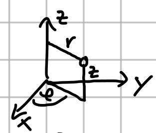
$$\boxed{\int_{\vec{\varphi}(M)} f(\vec{y})\, d\vec{y} = \int_M f(\vec{\varphi}(\vec{x})) \lvert \det(D\vec{\varphi}(\vec{x})) \rvert \, d\vec{x}}$$



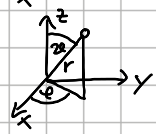
- Polark.: $\vec{x} = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \mapsto \vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$, $\det = r$



- Zylink.: $\vec{x} = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} \mapsto \vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}$, $\det = r$



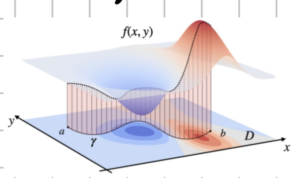
- Kugelk.: $\vec{x} = \begin{bmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{bmatrix} \mapsto \vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{bmatrix}$, $\det = r^2 \sin\vartheta$

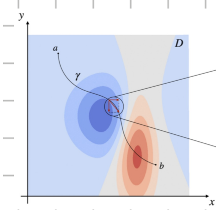


Kurvenintegral der Kurve $\Gamma := \mathrm{im}(\vec{\gamma}) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Skalarfeld $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma \subseteq D$

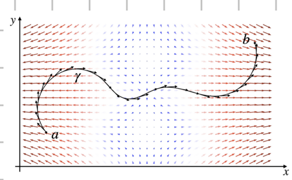
$$\boxed{\int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \lVert \dot{\vec{\gamma}}(t) \rVert \, dt}$$

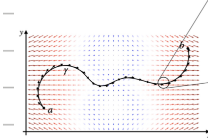


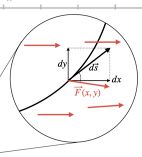


Vektorfeld $\vec{v}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma \subseteq D$

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\, dt}$$



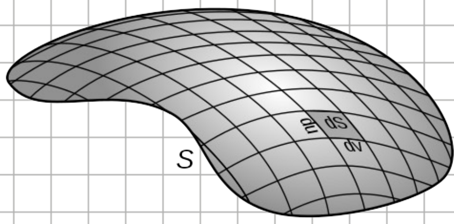




Oberflächenintegral über Fläche $S := \mathrm{im}(\vec{\varphi}) \subseteq \mathbb{R}^3$, $\vec{\varphi}: M \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Skalarfeld $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $S \subseteq D$

$$\boxed{\int_S f \, d\sigma = \int_M f(\vec{\varphi}(\vec{u})) \, |\vec{\varphi}_u(\vec{u}) \times \vec{\varphi}_v(\vec{u})| \, d\vec{u}}$$



Flächeninhalt von S

$$\boxed{|S| = \mathrm{vol}_2(S) = \int_S 1 \, d\sigma = \int_M |\vec{\varphi}_u(\vec{u}) \times \vec{\varphi}_v(\vec{u})| \, d\vec{u}}$$

→ $|\vec{\varphi}_u(\vec{u}) \times \vec{\varphi}_v(\vec{u})| > 0$ gibt den Faktor an, um welchen die Funktion $\vec{\varphi}$ eine kleine Umgebung um $\vec{u} \in M$ expandiert (>1) oder schrumpft (<1)

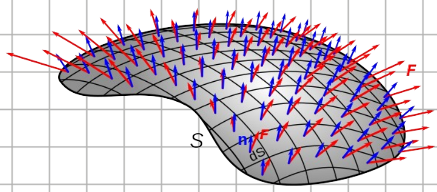
→ verallgemeinerte Funktionaldeterminante: $\sqrt{\det(D\vec{\varphi}^T D\vec{\varphi})}$

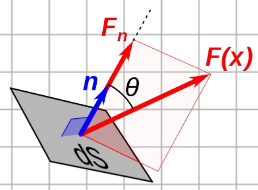
→ für $(n-1)$-dim. Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$

Vektorfeld $\vec{v}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $S \subseteq D$

$$\boxed{\int_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_M \vec{v}(\vec{\varphi}(\vec{u})) \cdot (\vec{\varphi}_u(\vec{u}) \times \vec{\varphi}_v(\vec{u})) \, d\vec{u}}$$

$=: \Phi_S(\vec{v})$ (skalarer Fluss von $\vec{v}$ durch S)





Einheitsnormalenvektorfeld

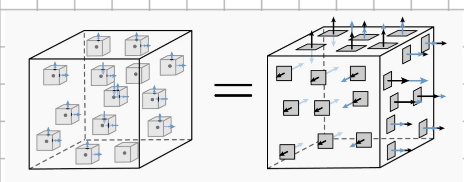
$$\boxed{\vec{n}(\vec{u}) = \frac{\vec{\varphi}_u(\vec{u}) \times \vec{\varphi}_v(\vec{u})}{|\vec{\varphi}_u(\vec{u}) \times \vec{\varphi}_v(\vec{u})|}}$$

→ damit kann man auch vektorielles als skalares schreiben: $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma$

Integralsätze

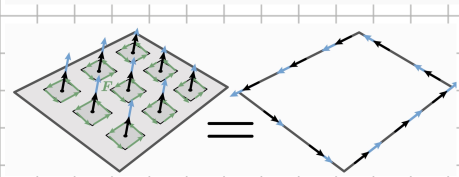
Gauss

$$\boxed{\int_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}}$$



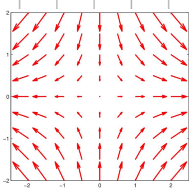
Stokes

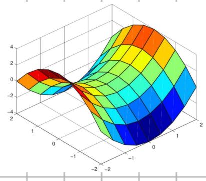
$$\boxed{\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x}}$$



Skalarpotenzial

Vektorfeld $\vec{v}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kann zerlegt werden in wirbelfreies $\vec{v}_Q$ und quellenfreies $\vec{v}_W$





falls $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, resp $\vec{v}_W = \vec{0}$ $\Rightarrow \int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x} = 0$

$\Rightarrow$ Kurvenintegral wegunabhängig

$\Rightarrow$ Skalarfeld (Skalarpotenzial) $\varphi: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = -\nabla \varphi$ existiert

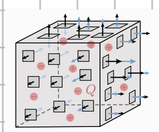
$\to$ nur bis auf additive Konstante eindeutig bestimmt, da $\nabla(\varphi + c) = \nabla \varphi$

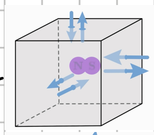
$\to$ gibt auch Konvention $\vec{v} = \nabla \varphi$

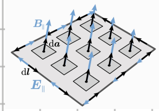
$$\boxed{\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}_0) - \int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{x} = \varphi_0 - \int_0^1 \vec{v}(\vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)\, dt}$$

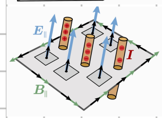
Maxwell-Gleichungen

el. Feldstärke $\vec{E}(\vec{x}, t)$ $[Vm^{-1}]$, Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t)$ $[Cm^{-3}]$, Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}, t)$ $[Am^{-2}]$ und mag. Flussdichte $\vec{B}(\vec{x}, t)$ $[T]$ erfüllen

Gauss  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (1)

Gauss für Magnetfelder  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (2)

Faraday  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (3)

Ampère  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (4)

Knotensatz

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) \overset{(4)}{=} \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{E})}{\partial t} \overset{(1)}{=} \mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

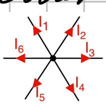
$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}$$

$$0 = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}\, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\, dV + \int_V \nabla \cdot \vec{j}\, dV \overset{\text{Gauss Integralsatz}}{=} \frac{\partial Q}{\partial t} + \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{a} = \frac{dQ}{dt} + \Phi_{\partial V}(\vec{j})$$

$Q\,[C] \mathrel{\hat=}$ Gesamtladung in Volumen V, $\Phi_{\partial V}\,[A] \mathrel{\hat=}$ Nettostrom durch Randfläche ∂V

falls sich Gesamtladung in V nicht ändert, resp $\frac{dQ}{dt} = 0$, und ∂V einen Knotenpunkt in el. Netzwerk umschliesst

$\Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{a} = \sum_k I_k = 0$



Oberflächenintegral

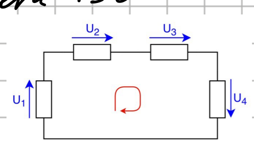
Maschensatz

$$0 \overset{(3)}{=} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$0 = \int_S \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \overset{\text{Stokes Integralsatz}}{=} \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{x} + \frac{d}{dt} \Phi_S(\vec{B})$$

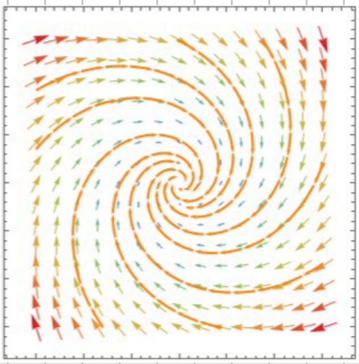
falls sich mag. Fluss durch Fläche S nicht ändert, resp $\frac{d}{dt} \Phi_S(\vec{B}) = 0$, und ∂S eine Masche in el. Netzwerk ist

$\Rightarrow \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \sum_k U_k = 0$



Kurvenintegral

Gewöhnliche Differenzialgleichungen



separierbare gDgln $y' = f(x)g(y)$

0. Nullstellen von g: Jede Nullstelle ist eine Lösung (konstante Lsgen)
1. $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$
2. $\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$
3. $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$ 3.' $\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(u)}du = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$
4. $\phi(x,y) = \tilde{C}$ 4.' keine Integrationskonstante
5. nach y auflösen

lin. gDgln 1. Ordnung mit konst. Koeff. $y' + ay = g(x)$

Ansatz: $y = y_h + y_p$ allgemeine Lsg (enthält 1 Integrationskonstante C)

$y_h = Ce^{-ax}$

$g(x)$	y_p
$A_0 + \dots + A_n x^n$	$c_0 + \dots + c_n x^n$
$A\sin(\omega_g x) + B\cos(\omega_g x)$	$c_1\sin(\omega_g x) + c_2\cos(\omega_g x)$
Ae^{Bx}	ce^{Bx} falls $B \neq -a$ cxe^{Bx} falls $B = -a$

$y_p' + ay_p \stackrel{!}{=} g(x)$

oder direkt: $y = e^{-ax}\int e^{ax}g(x)\,dx$

lin. gDgln 2. Ordnung mit konst. Koeff. $y'' + ay' + by = g(x)$

Ansatz: $y = y_h + y_p$ allgemeine Lösung (enthält 2 Integrationskonstanten C_1, C_2)

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 = \begin{cases} e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cosh(\omega x) + C_2\frac{1}{\omega}\sinh(\omega x)\right) \text{ mit } \omega = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b} & \text{falls } a^2 > 4b \\ e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1 + C_2x\right) & \text{falls } a^2 = 4b \\ e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos(\omega x) + C_2\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)\right) \text{ mit } \omega = \frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2} & \text{falls } a^2 < 4b \end{cases}$$

$g(x)$	y_p
$A_0 + \dots + A_n x^n$	$c_0 + \dots + c_n x^n$
$A\sin(\omega_g x) + B\cos(\omega_g x)$	$c_1\sin(\omega_g x) + c_2\cos(\omega_g x)$ falls $i\omega_g \neq$ Nullstelle von $\lambda^2 + a\lambda + b$ $c_1x\sin(\omega_g x) + c_2x\cos(\omega_g x)$ falls $i\omega_g =$ Nullstelle von $\lambda^2 + a\lambda + b$
Ae^{Bx}	ce^{Bx} falls B keine Nullstelle von $\lambda^2 + a\lambda + b$ cxe^{Bx} falls B einfache Nullstelle von $\lambda^2 + a\lambda + b$ cx^2e^{Bx} falls B doppelte Nullstelle von $\lambda^2 + a\lambda + b$

$y_p'' + ay_p' + by_p \stackrel{!}{=} g(x)$

oder direkt: $y = y_1\int \frac{-y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}g(x)\,dx + y_2\int \frac{y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}g(x)\,dx$

Lin. gDgl 1. Ordnung $y' + f(x)y = g(x)$

allg. Lsg:

$$y(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x)\,dx$$ enthält 1 freien Parameter (Integrationskonstante)

→ lässt sich durch Variation d. Konstanten oder mit integrierendem Faktor herleiten

spez. Lsg mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = e^{-(F(x) - F(x_0))} y_0 + e^{-F(x)} \int_{x_0}^{x} e^{F(t)} g(t)\,dt$$

→ für konstante Koeff und spezielle Störfunktionen ist es schneller eine geeignete Ansatzfunktion zu benutzen

Substitution

Einige nicht separierbare oder nichtlineare gDgln 1. Ordnung lassen sich durch eine geeignete Substitution in separierbare oder lineare gDgln überführen. Diese können dann mit den Methoden aus dem Kap. 3.1.2 gelöst werden, und durch Rücksubstitution erhält man Lösungen der ursprünglichen gDgl. Wir geben hier drei Beispiele für solche Substitutionen:

ursprüngliche gDgl (für $y(x)$)	Substitution / Rücksubstitution	transformierte gDgl (für $u(x)$)
$y' = f(ax + by + c)$ (separierbar für $b = 0$)	$u := ax + by + c$ $y = \frac{u - ax - c}{b}$	$u' = a + bf(u)$ (separierbar)
$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$u := \frac{y}{x}$ $y = xu$	$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ (separierbar)
$y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (linear für $\alpha \in \{0, 1\}$) J. Bernoulli, 1655–1705	$u := y^{1-\alpha}$ $y = u^{1/(1-\alpha)}$	$u' = (1 - \alpha)(f(x)u + g(x))$ (linear)

Lin. Dgl n-ter Ordnung $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) y^{(k)} = g(x)$

allg. Lsg:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad \text{wobei} \quad y_h(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$$ n freie Parameter

$\{y_1, \ldots, y_n\}$ bilden ein Fundamentalsystem, also eine Basis d. Lösungsmenge d. homogenen lin. gDGL $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) y^{(k)} = 0$

y_p ist eine partikuläre Lösung d. inhomogenen lin. gDgl

→ kann i.A. mit einer Variation d. Konstanten aus y_h bestimmt werden

↳ für konstante Koeff und spezielle Störfunktionen ist es schneller eine geeignete Ansatzfunktion zu benutzen

Lin. Dgl n-ter Ordnung mit konst. Koeff. $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = g(x)$

allg. Lsg:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad \text{wobei} \quad y_h(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$$ n freie Parameter

Ansatz für homogene:

$$y_h(x) = e^{\lambda x}$$

eingesetzt in homogene ergibt:

$$\left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\right) e^{\lambda x} = p_{ch}(\lambda)\, e^{\lambda x} = 0$$

Zerlegen des p_{ch} in Linearfaktoren:

$$p_{ch}(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$ l verschiedene Nullstellen λ_i mit Vielfachheiten m_i

es gilt $m_1 + \dots + m_l = n$

allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$\boxed{y_h(x) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} C_{i,j}\, x^{j-1} e^{\lambda_i x}}$$

Beweis: Reduzierung der Ordnung

Resonanz:
tritt auf, wenn $g(x)$ einer Lösung entspricht, die bereits im Fundamentalsystem enthalten ist
=> ein entsprechender Ansatz $y_p(x)$ muss dann noch mit x^m multipliziert werden, wobei m die Vielfachheit der Nullstelle bezeichnet

die äussere Anregung $g(x)$ und der innere Zustand $y_h(x)$ der DGL schaukeln sich gegenseitig auf

Ansatz für Inhomogenitäten der Bauart $g(x) = (A_0 + A_1 x + \dots + A_p x^p)\, e^{Bx}$:

$$y_p(x) = x^m (c_0 + c_1 x + \dots + c_p x^p)\, e^{Bx}$$

wobei m die (allfällige) Vielfachheit der Nullstelle B von $p_{ch}(\lambda)$ bezeichnet

die unbekannten Koeff. c_h, $h = 0, \dots, p$ bestimmt man durch einsetzen in DGL und Koeffizientenvergleich

besteht Störfunktion aus einer Summe von Störfunktionen, so bestimmt man für jeden Teil eine Partikulärlösung und setzt diese zur Gesamtlösung zusammen (Superposition)

Lin. Syst. mit variablen Koef. $\vec{y}'(x) + \underline{A}(x)\vec{y}(x) = \vec{g}(x)$

homogener Teil:

$\mathcal{L}$:= Lösungsmenge d. hom. lin. Systems
$\mathcal{L}$ ist ein n-dim. Vektorraum

Fundamentalsystem := Teilmenge $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n\} \subseteq \mathcal{L}$ von n lin. unabh. Lösungen («Basislösungen») d. hom. lin. Systems

Fundamentalmatrix:

$$\underline{\Phi}(x) := (\vec{y}_1(x) \cdots \vec{y}_n(x)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Eigenschaften:
- $\underline{\Phi}' + \underline{A}(x)\underline{\Phi} = \underline{O}_n$
- $\det(\underline{\Phi}(x)) \neq 0 \;\; \forall x \in D$
- $\operatorname{span}(\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n\}) = \mathcal{L}$
- unterschiedliche Fundamentalmatrizen sind immer durch eine konstante invertierbare Matrix $\underline{C}$ miteinander verknüpft: $\underline{\Phi}_1(x) = \underline{C}\,\underline{\Phi}_2(x)$
- $\underline{\Phi}_{x_0}(x) := \underline{\Phi}(x)\underline{\Phi}^{-1}(x_0)$ nennt man Hauptfundamentalmatrix im Punkt x_0
  $\rightarrow$ es gilt $\underline{\Phi}_{x_0}(x_0) = \underline{E}_n$

allgemeine Lösung d. hom. lin. Syst.:

$$\boxed{\vec{y}_h(x) = \underline{\Phi}(x)\vec{C} = C_1\vec{y}_1(x) + \cdots + C_n\vec{y}_n(x), \quad \vec{C} = (C_1, \ldots, C_n)^T \in \mathbb{R}^n}$$

Linearkombination der Basislösungen

spezielle Lösung d. hom. lin. Syst. mit Anfangsbedingung $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$:

$$\boxed{\vec{y}_h(x) = \underline{\Phi}(x)\underline{\Phi}^{-1}(x_0)\vec{y}_0}$$

Variation der Konstanten (Methode zur Lösung d. inhomogenen DGL-Systems)

Ansatz: $\vec{y}(x) := \underline{\Phi}(x)\vec{C}(x)$

in DGL eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\vec{y}'(x) + \underline{A}(x)\vec{y}(x) \\
&= (\underline{\Phi}(x)\vec{C}(x))' + \underline{A}(x)\vec{y}(x) \\
&= \underline{\Phi}'(x)\vec{C}(x) + \underline{\Phi}(x)\vec{C}'(x) + \underline{A}(x)\underline{\Phi}(x)\vec{C}(x) \\
&= (\underline{\Phi}'(x) + \underline{A}(x)\underline{\Phi}(x))\vec{C}(x) + \underline{\Phi}(x)\vec{C}'(x) \\
&= \underline{O}_n\vec{C}(x) + \underline{\Phi}(x)\vec{C}'(x) \\
&= \underline{\Phi}(x)\vec{C}'(x) \stackrel{!}{=} \vec{g}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{C}'(x) &= \underline{\Phi}^{-1}(x)\vec{g}(x) \\
\Rightarrow \vec{C}(x) &= \int \underline{\Phi}^{-1}(x)\vec{g}(x)\,dx \\
\Rightarrow \vec{y}(x) &= \underline{\Phi}(x)\int \underline{\Phi}^{-1}(x)\vec{g}(x)\,dx \\
&= \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x)
\end{aligned}$$

inhomogenes lineares System:

allgemeine Lösung d. inhom. lin. Syst.:

$$\boxed{\vec{y}(x) = \underline{\Phi}(x)\int \underline{\Phi}^{-1}(x)\,\vec{g}(x)\,dx}$$

n freie Parameter (Integrationskonstante)

→ enthält Lösung d. homogenen Syst. als Spezialfall:

$\vec{g}(x) = \vec{0}_n \Rightarrow \vec{y}(x) = \underline{\Phi}(x)\int \vec{0}_n\,dx = \underline{\Phi}(x)\vec{c} = \vec{y}_h(x)$

falls Anfangsbedingung $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ gegeben kann man ein bestimmtes Integral verwenden:

$$\vec{y}(x) = \underline{\Phi}(x)\left(\int_{x_0}^{x} \underline{\Phi}^{-1}(t)\,\vec{g}(t)\,dt + \vec{c}\right) = \underline{\Phi}(x)\vec{c} + \underline{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x} \underline{\Phi}^{-1}(t)\,\vec{g}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{y}(x_0) = \underline{\Phi}(x_0)\vec{c} + \underline{\Phi}(x_0)\int_{x_0}^{x_0} \underline{\Phi}^{-1}(t)\,\vec{g}(t)\,dt = \underline{\Phi}(x_0)\vec{c} \overset{!}{=} \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow \vec{c} = \underline{\Phi}^{-1}(x_0)\,\vec{y}_0$$

somit folgt die

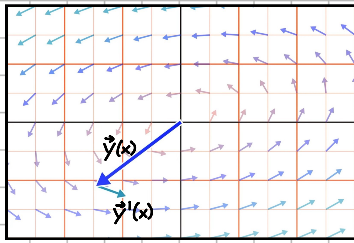
spezielle Lösung d. inhom. lin. Syst. mit Anfangsbedingung $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$:

$$\boxed{\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x) = \underline{\Phi}(x)\,\underline{\Phi}^{-1}(x_0)\,\vec{y}_0 + \underline{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x} \underline{\Phi}^{-1}(t)\,\vec{g}(t)\,dt}$$

→ enthält Lösung d. homogenen Syst. als Spezialfall:

$$\vec{g}(x) = \vec{0}_n \Rightarrow \vec{y}(x) = \underline{\Phi}(x)\,\underline{\Phi}^{-1}(x_0)\,\vec{y}_0 + \underbrace{\underline{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x} \underline{\Phi}^{-1}(t)\,\vec{0}_n\,dt}_{=\vec{0}} = \vec{y}_h(x)$$

Lin. Syst. mit konst. Koef. $\vec{y}'(x) + \underline{A}\vec{y}(x) = \vec{g}(x)$

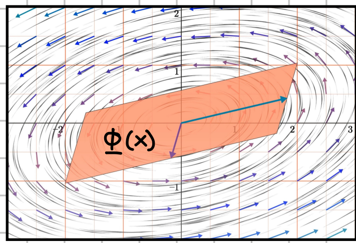


Fundamentalmatrix:

$$\boxed{\underline{\Phi}(x) = e^{-x\underline{A}} = \underline{V} e^{-x\underline{D}} \underline{V}^{-1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-\lambda_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}^{-1}}$$

mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ der Matrix $\underline{A}$

Eigenschaften:



- $\underline{\Phi}^{-1}(x_0) = (\underline{V} e^{-x_0\underline{D}} \underline{V}^{-1})^{-1} = \underline{V} e^{x_0\underline{D}} \underline{V}^{-1} = \underline{\Phi}(-x_0)$
- $\underline{\Phi}_{x_0} = \underline{\Phi}(x)\,\underline{\Phi}^{-1}(x_0) = \underline{V} e^{-x\underline{D}} \underline{V}^{-1} \underline{V} e^{x_0\underline{D}} \underline{V}^{-1} = \underline{V} e^{-(x-x_0)\underline{D}} \underline{V}^{-1} = \underline{\Phi}(x-x_0)$

Eigenwerte bestimmen

$\mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$

$\mathbb{R}^{2\times 2}$: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\operatorname{tr}(A))^2 - \det(A)}$

allgemeine Lösung d. hom. lin. Syst.:

$$\boxed{\vec{y}_h(x) = \underline{\Phi}(x)\vec{C}}$$

spezielle Lösung d. hom. lin. Syst. mit Anfangsbedingung $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$:

$$\boxed{\vec{y}_h(x) = \underline{\Phi}(x-x_0)\vec{y}_0}$$

allgemeine Lösung d. inhom. lin. Syst.:

$$\boxed{\vec{y}(x) = \underline{\Phi}(x)\int \underline{\Phi}(-x)\vec{g}(x)\,dx}$$

spezielle Lösung d. inhom. lin. Syst. mit Anfangsbedingung $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$:

$$\boxed{\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x) = \underline{\Phi}(x-x_0)\vec{y}_0 + \underline{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x} \underline{\Phi}(-t)\vec{g}(t)\,dt}$$

Fall $n=2$:

$\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\quad D := (a-d)^2 + 4bc$, $\quad \delta := \frac{1}{2}\sqrt{|D|}$

$$\underline{\Phi}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a+d}{2}x} \begin{pmatrix} \cosh(\delta x) - \frac{a-d}{2\delta}\sinh(\delta x) & -\frac{b}{\delta}\sinh(\delta x) \\ -\frac{c}{\delta}\sinh(\delta x) & \cosh(\delta x) + \frac{a-d}{2\delta}\sinh(\delta x) \end{pmatrix}, & D > 0 \\ e^{-\frac{a+d}{2}x} \begin{pmatrix} 1 - \frac{a-d}{2}x & -bx \\ -cx & 1 + \frac{a-d}{2}x \end{pmatrix}, & D = 0 \\ e^{-\frac{a+d}{2}x} \begin{pmatrix} \cos(\delta x) - \frac{a-d}{2\delta}\sin(\delta x) & -\frac{b}{\delta}\sin(\delta x) \\ -\frac{c}{\delta}\sin(\delta x) & \cos(\delta x) + \frac{a-d}{2\delta}\sin(\delta x) \end{pmatrix}, & D < 0 \end{cases}$$

Inverse einer 2×2-Matrix

If $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ then

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

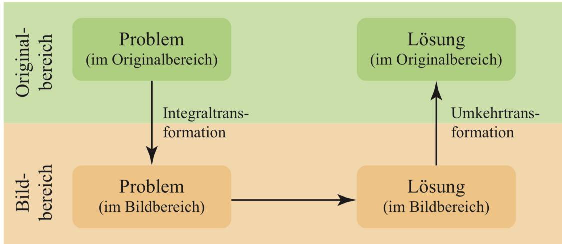
Inverse of A   Determinant of A   Adjoint of A

Note: A^{-1} exists only when $ad - bc \neq 0$

Fall $n > 2$:

Vorgehen analog, erst jedoch Jordansche Normalform nötig

Integral Transformationen



$$\boxed{F(s) = \mathcal{T}\{f\}(s) = \int_D K(t,s)\, f(t)\, dt}$$

$\mathcal{T}$: Integraloperator

f: Funktion $O \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

F: Funktion $B \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

K: Funktion $O \times B \to \mathbb{C}$ («Kern des Integraloperators $\mathcal{T}$»)

Fourier Transformation

$$\boxed{F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt}$$

inverse Fourier Transformation

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\omega)\, d\omega}$$

Laplace Transformation

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt}$$

→ macht die Lösung LDGL wesentlich einfacher

$s = \sigma + j\omega$

$e^{-\sigma t}$ nennt man Dämpfungsterm

Laplace Rücktransformation – Bromwich Integral

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} e^{st} F(s)\, ds}$$

γ ist eine vertikale Kontur in der komplexen Ebene, die so gewählt wird, dass alle Singularitäten von $F(s)$ links davon liegen

zweiseitige Laplace Transformation

$$\boxed{F(s) = \mathcal{B}\{f\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt}$$