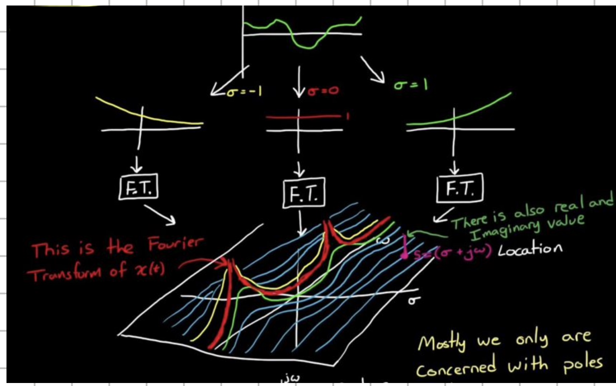
# Laplace Transformation




macht die Lösung LDGL wesentlich einfacher

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt}$$

$s = \sigma + j\omega$

$e^{-\sigma t}$ nennt man Dämpfungsterm

## Laplace Rücktransformation – Bromwich Integral

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} e^{st} F(s)\, ds}$$

$\gamma$ ist eine vertikale Kontur in der komplexen Ebene, die so gewählt wird, dass alle Singularitäten von $F(s)$ links davon liegen

## Zweiseitige Laplace Transformation

$$\boxed{F(s) = \mathcal{B}\{f\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt}$$

## Eigenschaften der Laplace Transformation

Linearitätssatz: Homogenität und Superposition erfüllt

Verschiebungssatz: $f(t-t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-st_0} F(s)$ für $t_0 \geq 0$

Ähnlichkeitssatz: $f(at) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ mit $a > 0$

Dämpfungssatz: $e^{-bt} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s+b)$ mit $b \in \mathbb{C}$

Faltungssatz: $f_1(t) * f_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_1(s) \cdot F_2(s)$

Differentiationssatz: $f^{(n)}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^n F(s) - s^{n-1} f(-0) - \dots - s f^{(n-2)}(-0) - f^{(n-1)}(-0)$

Integrationssatz: $\int_0^t f(\tau)\, d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s} F(s)$

Anfangswertsatz: $f(0+) = \lim_{t \searrow 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s F(s)$

Endwertsatz: $f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s F(s)$

# wichtige Laplace Transformierte

$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$ für $t>0$

## Elementar- und Einheitsfunktionen:

| | | |
|---|---|---|
| $1$ | $\delta(t)$ | Diracfunktion |
| $e^{-Ts}$ | $\delta(t-T)$ | verschobene Diracfunktion |
| $\frac{1}{s}$ | $\sigma(t)$ | Einheits-Sprungfunktion |
| $\frac{1}{s}\cdot e^{-Ts}$ | $\sigma(t-T)$ | verschobene Einheits-Sprungfunktion |
| $\frac{1-e^{-Ts}}{s}$ | $\sigma(t)-\sigma(t-T)$ | Einheits-Rechteckimpuls |
| $\frac{1}{s^2}$ | $t$ | Einheits-Anstiegsfunktion |
| $\frac{1}{s^2}\cdot e^{-Ts}$ | $(t-T)\cdot\sigma(t-T)$ | verschobene Einheits-Anstiegsfunktion |
| $\frac{1}{s^3}$ | $\frac{t^2}{2}$ | Einheits-Parabelfunktion |
| $\frac{1}{s^n}$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n=1,2,3,\dots$ | |

## Übertragungsfunktionen mit Zeitkonstanten:

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{1+T_1\cdot s}$ | $\frac{1}{T_1}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$ |
| $\frac{1}{(1+T_1\cdot s)^2}$ | $\frac{t}{T_1^2}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$ |
| $\frac{1}{(1+T_1\cdot s)^n}$ | $\frac{t^{n-1}}{{T_1}^n\cdot(n-1)!}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad n=1,2,3,\dots$ |
| $\frac{1}{(1+T_1\cdot s)\cdot s}$ | $1-e^{-\frac{t}{T_1}}$ |
| $\frac{1+T_v\cdot s}{(1+T_1\cdot s)\cdot s}$ | $1+\frac{T_v-T_1}{T_1}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$ |
| $\frac{1}{(1+T_1\cdot s)\cdot s^2}$ | $t-T_1+T_1\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$ |
| $\frac{1}{(1+T_1\cdot s)^2\cdot s}$ | $1-\left(1+\frac{t}{T_1}\right)\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$ |
| $\frac{1}{(1+T_1\cdot s)^n\cdot s}, \quad n=1,2,3,\dots$ | $1-e^{-\frac{t}{T_1}}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{t}{T_1}\right)^i}{i!}$ |
| $\frac{1+T_v\cdot s}{(1+T_1\cdot s)^2\cdot s}$ | $1+\left[\frac{T_v-T_1}{{T_1}^2}\cdot t-1\right]\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$ |
| $\frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}, \quad T_1\neq T_2$ | $\frac{1}{T_1-T_2}\cdot\left[e^{-\frac{t}{T_1}}-e^{-\frac{t}{T_2}}\right]$ |
| $\frac{s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}, \quad T_1\neq T_2$ | $\frac{1}{T_2-T_1}\cdot\left[\frac{1}{T_1}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}-\frac{1}{T_2}\cdot e^{-\frac{t}{T_2}}\right]$ |
| $\frac{1+T_v s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}, \quad T_1\neq T_2$ | $\frac{1}{T_1-T_2}\cdot\left[\frac{T_1-T_v}{T_1}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}-\frac{T_2-T_v}{T_2}\cdot e^{-\frac{t}{T_2}}\right]$ |
| $\frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)s}, \quad T_1\neq T_2$ | $1-\frac{1}{T_1-T_2}\cdot\left[T_1\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2\cdot e^{-\frac{t}{T_2}}\right]$ |
| $\frac{1+T_v s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)s}, \quad T_1\neq T_2$ | $1-\frac{T_1-T_v}{T_1-T_2}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2-T_v}{T_1-T_2}\cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$ |
| $\frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)}$, $T_1, T_2, T_3\neq$ | $\frac{T_1\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}+\frac{T_2\cdot e^{-\frac{t}{T_2}}}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}+\frac{T_3\cdot e^{-\frac{t}{T_3}}}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$ |
| $\frac{s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)}$, $T_1, T_2, T_3\neq$ | $\frac{e^{-\frac{t}{T_1}}}{(T_1-T_2)(T_3-T_1)}+\frac{e^{-\frac{t}{T_2}}}{(T_2-T_3)(T_1-T_2)}+\frac{e^{-\frac{t}{T_3}}}{(T_3-T_1)(T_2-T_3)}$ |

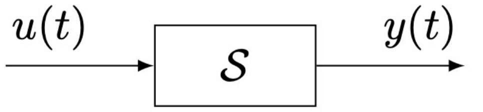
## Übertragungsfunktionen mit Pol- und Nullstellen:

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-at}$ |
| $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $t\cdot e^{-at}$ |
| $\frac{1}{(s+a)^n}$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\cdot e^{-at}, \quad n=1,2,3,\dots$ |
| $\frac{s}{s+a}=1-\frac{a}{s+a}$ | $\delta(t)-a\cdot e^{-at}$ |
| $\frac{s+z}{s+a}\,;\; 1-\frac{a-z}{s+a}$ | $\delta(t)-(a-z)\cdot e^{-at}$ |
| $\frac{1}{(s+a)\cdot s}$ | $\frac{1}{a}\cdot\left[1-e^{-at}\right]$ |
| $\frac{s+z}{(s+a)\cdot s}$ | $\frac{z}{a}\cdot\left[1-e^{-at}\right]+e^{-at}$ |
| $\frac{1}{(s+a)\cdot s^2}$ | $\frac{1}{a^2}\cdot\left[-1+a\cdot t+e^{-at}\right]$ |
| $\frac{s}{(s+a)^2}$ | $(1-a\cdot t)\cdot e^{-at}$ |
| $\frac{1}{(s+a)^2\cdot s}$ | $\frac{1}{a^2}\cdot\left[1-e^{-at}-a\cdot t\cdot e^{-at}\right]$ |
| $\frac{1}{(s+a)^n\cdot s}, \quad n=1,2,3,\dots$ | $\frac{1}{a^n}\cdot\left[1-e^{-at}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(a\cdot t)^i}{i!}\right]$ |
| $\frac{s+z}{(s+a)^2\cdot s}$ | $\frac{z}{a^2}\cdot\left[1-e^{-at}+\frac{a^2-a\cdot z}{z}\cdot t\cdot e^{-at}\right]$ |
| $\frac{1}{(s+a)\cdot(s+b)}, \quad a\neq b$ | $\frac{1}{b-a}\cdot\left[e^{-at}-e^{-bt}\right]$ |
| $\frac{s}{(s+a)\cdot(s+b)}, \quad a\neq b$ | $\frac{1}{a-b}\cdot\left[a\cdot e^{-at}-b\cdot e^{-bt}\right]$ |
| $\frac{s+z}{(s+a)\cdot(s+b)}, \quad a\neq b$ | $\frac{1}{b-a}\cdot\left[(z-a)\cdot e^{-at}-(z-b)\cdot e^{-bt}\right]$ |
| $\frac{1}{(s+a)\cdot(s+b)\cdot s}, \quad a\neq b$ | $\frac{1}{a\cdot b}\cdot\left[1-\frac{b}{b-a}\cdot e^{-at}+\frac{a}{b-a}\cdot e^{-bt}\right]$ |
| $\frac{s+z}{(s+a)\cdot(s+b)\cdot s}, \quad a\neq b$ | $\frac{1}{a\cdot b}\cdot\left[z-\frac{b\cdot(z-a)}{b-a}\cdot e^{-at}+\frac{a\cdot(z-b)}{b-a}\cdot e^{-bt}\right]$ |

## Übertragungsfunktionen in Polynomform:

| | |
|---|---|
| $\frac{{\omega_0}^2}{s^2+2D\omega_0 s+{\omega_0}^2}$ | $\frac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}}\cdot e^{-D\omega_0 t}\cdot\sin(\omega_e t)=\frac{{\omega_0}^2}{\omega_e}\cdot e^{-D\omega_0 t}\cdot\sin(\omega_e t)$, <br> $-1<D<1, \quad \omega_e=\omega_0\sqrt{1-D^2}$ |
| $\frac{s}{s^2+2D\omega_0 s+{\omega_0}^2}$ | $e^{-D\omega_0 t}\cdot\left[\cos(\omega_e t)-\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\cdot\sin(\omega_e t)\right]$, <br> $-1<D<1, \quad \omega_e=\omega_0\sqrt{1-D^2}$ |
| $\frac{{\omega_0}^2}{(s^2+2D\omega_0 s+{\omega_0}^2)s}$ | $1-\frac{1}{\sqrt{1-D^2}}\cdot e^{-D\omega_0 t}\cdot\sin(\omega_e t+\phi)$, <br> $-1<D<1, \quad \omega_e=\omega_0\sqrt{1-D^2}, \quad \phi=\arccos(D)$ |
| $\frac{a}{s^2-a^2}$ | $\sinh(at)$ |
| $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\cosh(at)$ |
| $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\sin(\omega t)$ |
| $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\cos(\omega t)$ |

# Dynamische Systeme




$u(t)$: Eingang / Erregung des Systems
$y(t)$: Ausgang / Reaktion des Systems

$$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_q u^{(q)} + b_{q-1} u^{(q-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u}$$

Lösung der DGL mit Erregung $u(t)$ ist $y(t)$, man schreibt $y(t) = S\{u(t)\}$

LTI - System: Linear Time Independent

→ Linear: Superposition und Homogenität, resp: $S\{\sum_k \alpha_k u_k(t)\} = \sum_k \alpha_k S\{u_k(t)\}$

→ Zeitinvarianz: $a_{(\cdot)}, b_{(\cdot)}$ sind konstant

Kausalität:

Systemausgang $y$ kann nur von den Eingangsgrössen abhängen, welche in der Vergangenheit liegen

$\Rightarrow \boxed{q \leq n}$

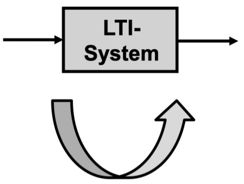
# Kennfunktionen dynamischer Systeme

Gewichtsfunktion / Impulsantwort / Stossantwort $g(t) = S\{\delta(t)\}$ — Einheitsimpulsantwort

→ beschreibt LTI-System vollständig

→ man kann mit $g(t)$ Ausgangssignal für beliebiges Eingangssignal berechnen:

$$u(t) = u(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$




$$\boxed{y(t) = u(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau}$$

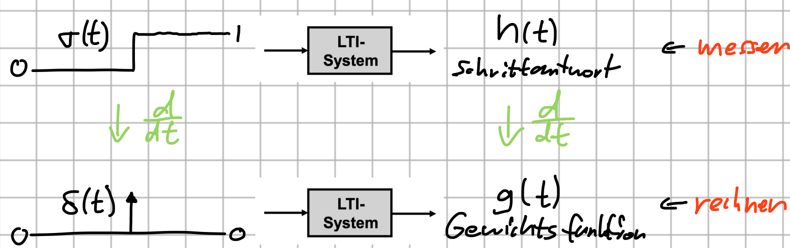
MATLAB: y = conv(u,g)

Gewichtsfunktion $g(t) = S(\delta(t))$ bestimmen:

Schrittantwort $h(t) = S(\sigma(t))$ messen (einfacher zu messen) und ableiten:

$$h(t) = \sigma(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{g(t) = \frac{d}{dt} h(t)}$$




# Systemantwort im Bildbereich

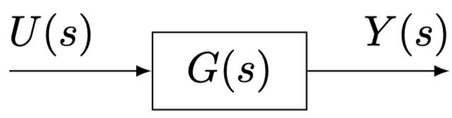
$u(t) \longrightarrow$ LTI-System $\longrightarrow y(t) = g(t) * u(t) = S\{u(t)\}$

$U(s) \longrightarrow \otimes \longrightarrow \boxed{Y(s) = G(s) \cdot U(s)}$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$

# Übertragungsfunktion

→ analog zu Frequenzgang bei Fouriertransformation

zentraler Begriff für LTI Systeme, gibt auf einfache Art Auskunft über das dynamische Verhalten eines Systems




$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathcal{L}(g(t))}$$

direkt aus DGL ablesbar:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}}$$

$q \leq n$ wegen Kausalität

man kann $G(s)$ aus Frequenzgang gewinnen, indem man dort $j\omega$ durch $s$ ersetzt

bei instabilen Systemen beschreibt dies dann allerdings nicht das stationäre Verhalten bei sinusförmigen Anregungen, da diese keinen stationären Zustand besitzen (die Trajektorien laufen gegen $\infty$)

→ streng genommen sind die Bedingungen d. Fouriertransformation jedoch auch nicht erfüllt, der Frequenzgang existiert theoretisch also gar nicht

Nenner d. tf wesentlich für Charakterisierung eines dynamischen Systems
→ „charakteristisches Polynom"

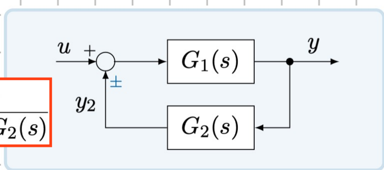
$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

Anfangsbedingungen werden für $G(s)$ nicht mittransformiert
⇒ man betrachtet nur partikuläre Lösung
→ homogene Lösung sowieso exponentiell abklingend falls System stabil

# Blockschaltbilder

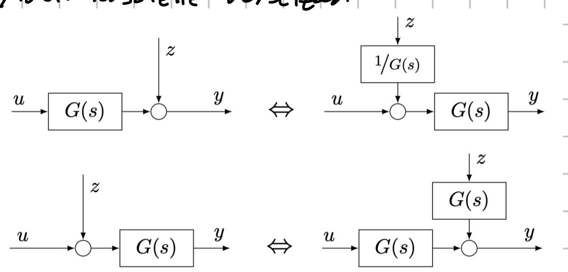
Rückführung:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)\,G_2(s)}}$$

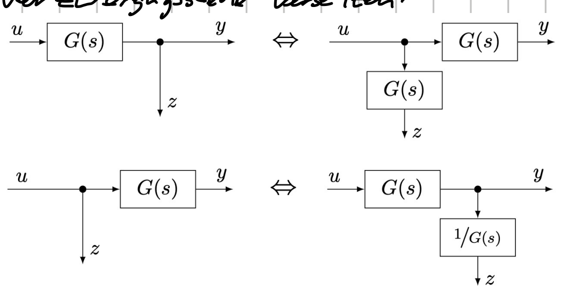


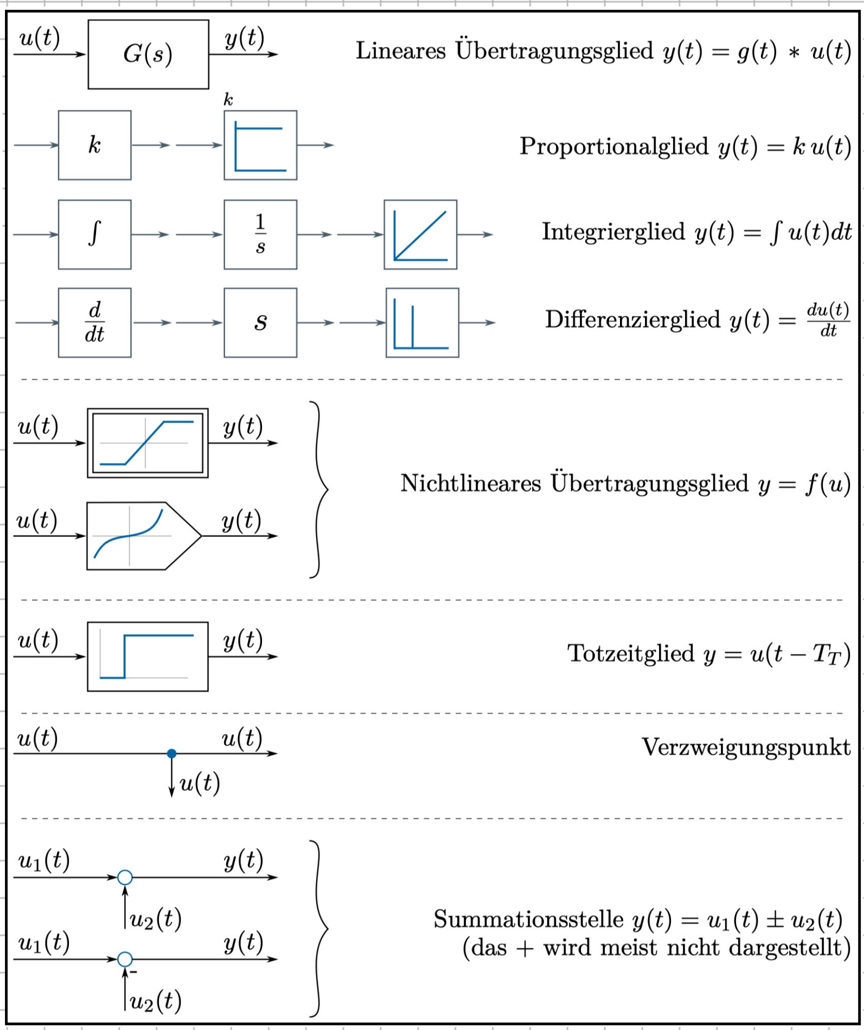

Gegenkopplung (unteres Vorzeichen):
wichtigste Schaltung d. Regelungstechnik

Additionsstelle versetzen:




Verzweigungsstelle versetzen:



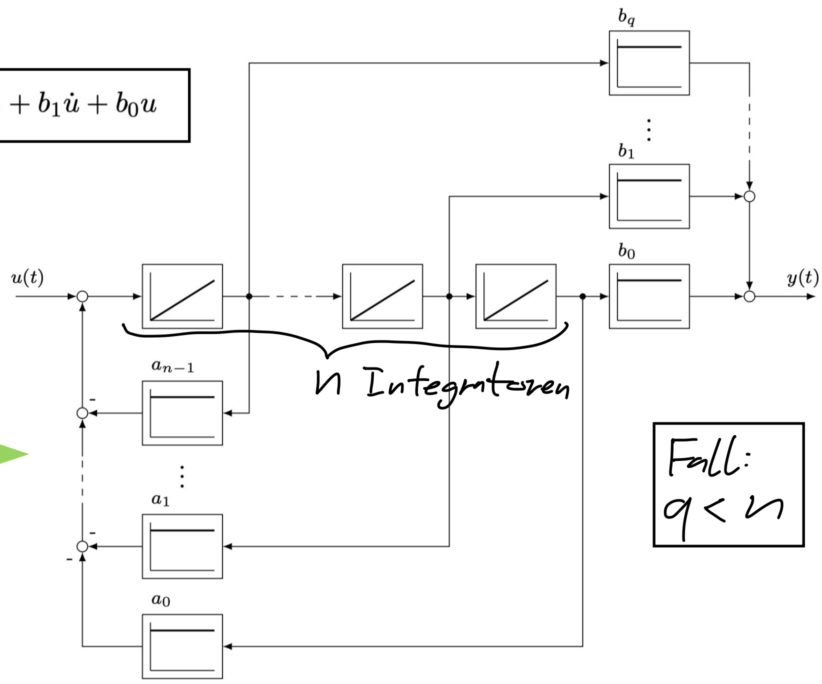
# Differentialgleichung

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_q u^{(q)} + \ldots + b_1\dot{u} + b_0 u}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1}s^{q-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}}$$

**Sprungfähigkeit: $q = n$ resp. $b_n \neq 0$**

falls n. sprungfähig ($q < n$) →




falls sprungfähig ($q = n$) ⇒ direkter Durchgriff von Systemeingang zu Systemausgang

↳ Schrittantwort zu Zeitpunkt $t = 0^+$ von Null verschieden: $y(t=0^+) \neq 0$
→ $y(t=0^+)$ kann mit Anfangswertsatz berechnet werden

## Einheiten

empfehlenswert die Einheiten zu berücksichtigen in Signalpfaden um physikalische Vorgänge besser zu verstehen und Fehler vermeiden

- Integrator → Multiplikation der Einheit mit Zeit
- Differenzierglied → Division der Einheit durch Zeit
- Proportionalglied → Multiplikation der Einheiten

## Darstellungsformen

### Polynomdarstellung

$$G(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

wird üblicherweise mit $a_n$ gekürzt, damit vor höchsten Potenz im Nenner eine 1 steht:

$$G(s) = \frac{\tilde{b}_q s^q + \tilde{b}_{q-1} s^{q-1} + \dots + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{s^n + \tilde{a}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0}$$

### Pol-Nullstellenform

$$G(s) = \frac{b_q}{a_n} \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_{q-1})(s-z_q)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-1})(s-p_n)}$$

Nullstellen $z_i$, Polstellen $p_i$, Verstärkung $b_q/a_n$ charakterisieren ein LTI-System eindeutig!

falls komplexe $z$ oder $p$ $\Rightarrow$ treten als komplex konj. Paare auf (da alle $a, b \in \mathbb{R}$)

$\rightarrow$ werden zu Polynomen 2ter Ordnung zusammengefasst

### Summendarstellung / Partialbruchdarstellung

Voraussetzungen: $q < n$, keine mehrfachen Polstellen

$$G(s) = A_1 \frac{1}{s-p_1} + A_2 \frac{1}{s-p_2} + \dots + A_{n-1} \frac{1}{s-p_{n-1}} + A_n \frac{1}{s-p_n} \quad \text{mit} \quad A_i = \frac{Z(p_i)}{\frac{d}{ds} N(p_i)}$$

daraus lässt sich sehr einfach die Gewichtsfunktion bestimmen (inverse LT):

$$g(s) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_{n-1} e^{p_{n-1} t} + A_n e^{p_n t}$$

### Zeitkonstantendarstellung

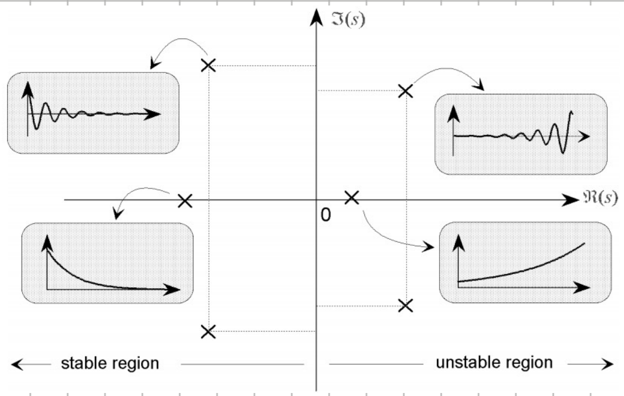
Voraussetzung: Polstellen reell

$$G(s) = \frac{b_q}{a_n} \cdot \frac{(-1)^n}{p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n} \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_{q-1})(s-z_q)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)\cdots(\tau_{n-1} s + 1)(\tau_n s + 1)} \quad \text{mit } \tau_i = -1/p_i$$

# Systemeigenschaften

Stabilität von LTI-System anhand Pollage:
- stabil falls alle Pole $Re(p) < 0$
- instabil falls mind 1 Pol $Re(p) > 0$
- grenzstabil, falls 1 Pol $Re(p) = 0$

Um die TF vollständig anzugeben muss man noch den Verstärkungsfaktor kennen




## Pollage

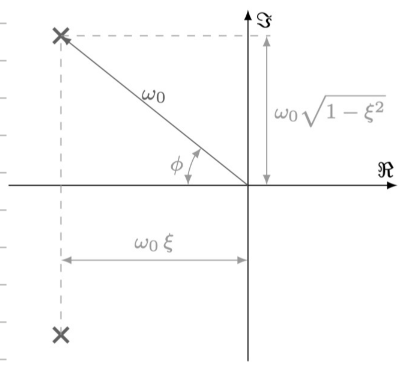
- je grösser $|p|$ desto höher/schneller ist Dynamik, die dieser $p$ zum System beiträgt
- bei Sprungantwort wird das generelle Zeitverhalten vom langsamsten $p$ / $p$-Paar dominiert
- gibt es komplexe $p$-Paare $\Rightarrow$ es treten Schwingungen im Zeitverhalten auf
- Schwingungen umso ausgeprägter, je grösser $Im(p)$ gegenüber $Re(p)$ ist

System $2^{ter}$ Ordnung ohne Nullstellen:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$ mit Eigenfrequenz $\omega_0$ und Dämpfungsfaktor $\xi$

$$p_{1,2} = \omega_0\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \Rightarrow \begin{cases} Re(p_{1,2}) = -\omega_0 \xi \\ Im(p_{1,2}) = \pm\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{-Re(p)}{\omega_0}\right) = \arccos(\xi)$$

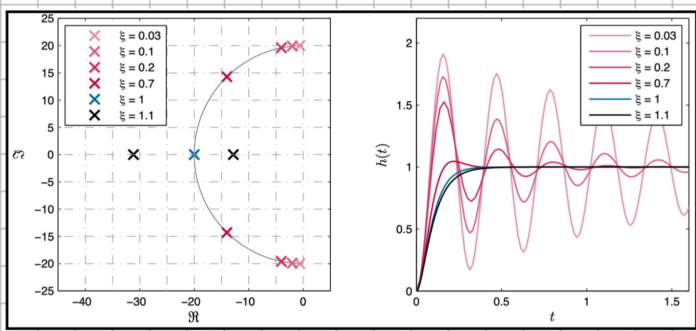



bei Variation des Dämpfungsterms $\xi$ wandern Pole auf Kreisen um den Ursprung, bei kleinem $\xi$ laufen sie in Richtung imaginäre Achse, für $\xi = 1$ treffen sie sich auf der reellen Achse (aperiodischer Grenzfall)

für $0.7 < \xi < 1.0$ keine eigentliche Schwingung zu erkennen, Dämpfung dominiert das Verhalten so stark, dass kaum eine Schwingung entstehen kann

viele technische Systeme kann man vereinfacht als Systeme $2^{ter}$ Ordnung beschreiben:

Feder-Masse-Dämpfersystem, RLC-Schwingkreis, Tiefpass $2^{ter}$ Ordnung, Thermisches System, usw.




## E/A-Stabilität

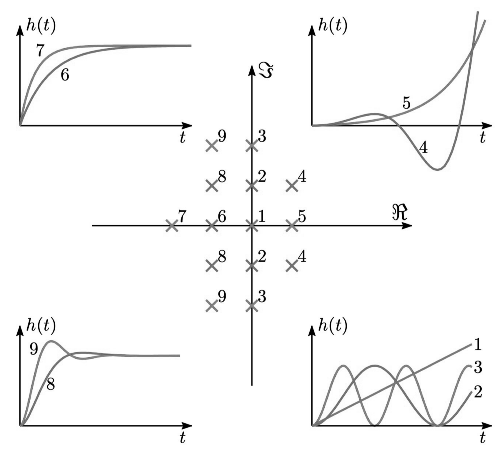
endliches Eingangssignal $u(t)$ mit $|u(t)| < \infty \; \forall t$ führt zu endlichem Ausgangssignal $|y(t)| < \infty \; \forall t$

$\rightarrow$ gleichwertig zu Definition über Pollage

System E/A-stabil

$\Leftrightarrow \int_0^\infty |g(t)|\,dt < \infty$

$\Leftrightarrow Re(p_i) < 0 \; \forall i$



# Stabilitätskriterium nach Hurwitz

Adolf Hurwitz

$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$

falls Polynom Grad $n \geq 5$
$\Rightarrow$ keine analytische Formel mehr um Nullstellen zu berechnen
$\rightarrow$ nur noch numerisch lösbar

ob Nullstellen eines Polynoms negativen Realteil haben, kann man aber auch herausfinden ohne diese explizit zu berechnen $\rightarrow$ Hurwitzmatrix $\underline{H}$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

in $\underline{H}$ werden Koeffizienten mit Index $> n$ zu $0$ gesetzt

Hurwitzdeterminanten:

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_{n-1} = \det(\underline{M}), \quad D_n = \begin{vmatrix} \underline{M} & \vec{0} \\ \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n D_{n-1}$$

$\hookrightarrow$ muss nicht berechnet werden, da $a_n > 0$ und $D_{n-1} > 0$ bereits geprüft wurden

Hurwitzkriterium:

> alle Nullstellen von $P(s)$ haben negativen Realteil, falls
> (i) alle Koeffizienten $a_i$ treten auf und sind positiv
> (ii) alle Hurwitzdeterminanten $D_i$ von $\underline{H}$ sind positiv

#Nullstellen in rechter Halbebene = #Vorzeichenwechsel in der Reihe $D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}$

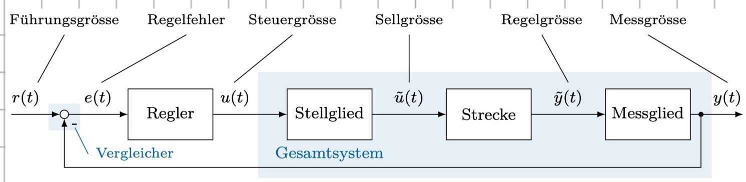
# Rückgekoppelte Systeme

bei Regelung wird (im Gegensatz zu Steuerung) die Regelgrösse mit der Führungsgrösse verglichen


Fliehkraftregler

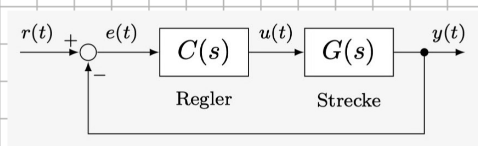
Vorteile:
- es kann auf Störungen eingegangen werden, da deren Einfluss durch Rückführung registriert wird
- es kann auch ein gewünschtes Verhalten erzielt werden, wenn sich Verhalten d. Sys. ändert

Nachteile:
- ein stabiles System kann durch Regelung destabilisiert werden
- erhöhter Aufwand bei Umsetzung (Regeleinrichtung, Sensorik)




Grundstruktur klassischer Regelkreise:
aus Führungsgrösse und Messgrösse wird Regelfehler berechnet und dem Regler zugeführt, welcher daraus die Steuergrösse bildet und diese an das Stellglied gibt
→ Stellglied, Strecke, Messglied üblicherweise zu Regelstrecke zusammengefasst

# Führungsverhalten

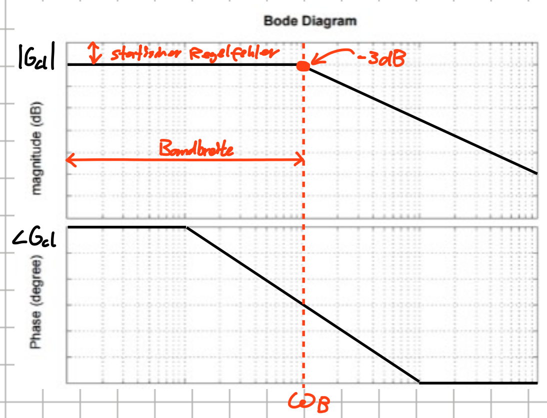



Führungsübertragungsfunktion: $G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)\,G(s)}{1 + C(s)\,G(s)}$

ÜTF d. offenen Kette: $G_o(s) = C(s)\,G(s) \overset{\text{oft}}{=} n(s)/d(s)$

$$\Rightarrow G_{cl}(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{\frac{n}{d}}{1+\frac{n}{d}} = \frac{n}{d+n}$$

es wird angestrebt, dass geregeltes System über weiten Frequenzbereich proportionales Verhalten hat
⇒ Frequenzgang d. ger. S. verhält sich wie TP 1. oder 2. Ordnung




Ziel: statischer Regelfehler = 1 = 0dB, möglichst grosse Bandbreite

rechts angenäherter Verlauf (als Konstruktionshilfe), bei Grenzfrequenz gilt eig. schon $|G_{cl}(j\omega_B)| = |G_{cl}(j0)| - 3dB$
→ eine von vielen Definitionen

Bandbreite: $\boxed{0 \leq \omega \leq \omega_B}$

falls sich $G_{cl}(s)$ wie TP 1ster Ordnung verhält, gilt:

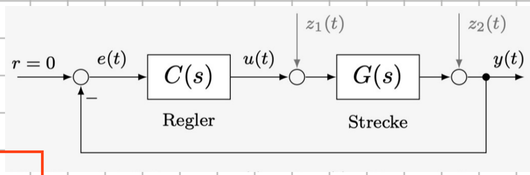
$$|G_{cl}(j\omega_B)| = \frac{DC}{\sqrt{2}} = 0.7 \cdot DC \quad \text{da} \quad -3dB = 10^{-3/20} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

damit ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = |G_{cl}(j\omega_B)| = \left|\frac{1}{Tj\omega_B + 1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega_B^2}} \Rightarrow 2 = 1 + T^2\omega_B^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_B = \frac{1}{T}}$$

## Störverhalten




um Wirkung von $z_{1,2}$ betrachten, setzt man $r$ und $z_{2,1} = 0$

Störübertragungsfunktionen:

$$G_{z1}(s) = \frac{Y(s)}{Z_1(s)} = \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)} = \left| \begin{array}{l} \text{falls:} \\ C(s)=\frac{n_c}{d_c} \\ G(s)=\frac{n}{d} \end{array} \right| = \frac{d_c n}{d_c d + n_c n}$$

$$G_{z2}(s) = \frac{Y(s)}{Z_2(s)} = \frac{1}{1+C(s)G(s)} = \frac{d_c d}{d_c d + n_c n}$$

Nenner bei $G_{cl}$, $G_{z1}$, $G_{z2}$ identisch $\Rightarrow$ gleiche Stabilitätseigenschaften

$\Rightarrow$ Nennerpolynom beschreibt Systemeigenschaft und ist nicht spezifisch für ein Ein-/Ausgangsverhalten, Zähler sind hingegen verschieden

desweiteren können $G_{cl}$ und $G_{z2}$ nicht unabhängig voneinander beeinflusst werden, da

$$G_{cl} + G_{z2} = \frac{G_0}{1+G_0} + \frac{1}{1+G_0} = 1$$

## stationäre Eigenschaften

neben grossen Bandbreite möchte man, dass Regelgrösse im statischen Fall der Führungsgrösse folgt, also bei einem Einheitsschritt ($r(t)=\sigma(t)$) soll dieser Wert exakt erreicht werden:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\,R(s)\,G_{cl}(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}G_{cl}(s) = \lim_{s\to 0} G_{cl}(s)} \overset{!}{=} 1$$

unter Voraussetzung dass Regelkreis stabil ist folgt daraus:

$$\lim_{s\to 0} G_{cl}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \overset{!}{=} 1 \iff \lim_{s\to 0} G_0(s) = 1 + \lim_{s\to 0} G_0(s) \Rightarrow \lim_{s\to 0} G_0(s) = \infty$$

falls $G_0$ gebr. rat. Funktion ist, $G_0(s) = \sum_{i=0}^{q} b_i s^i / \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$, folgt daraus: $a_0 = 0$ $b_0 \neq 1$

$\Rightarrow$ aus $G_0$ muss also ein Faktor $1/s^m$ für $m \geq 1$ herausgezogen werden können:

$$G_0(s) = \frac{1}{s^m} \cdot \frac{b_q s^q + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^{n-m} + \dots + a_m} = \frac{1}{s^m}\tilde{G}_0(s)$$

$\Rightarrow$ offene Kette $G_0$ muss mind. einfach integrierendes Verhalten haben
$\rightarrow$ muss nicht Regler sein, kann auch Strecke sein

oft wird auch gefordert dass konstante Störungen ausgeregelt werden: $\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}G_z(s) \overset{!}{=} 0$

$$\lim_{s\to 0} G_{z1}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{G}{1+CG} \overset{!}{=} 0$$

$\rightarrow$ damit dies gilt muss entweder Strecke $G$ differenzierendes Verhalten haben (selten der Fall) oder Nenner muss $\rightarrow \infty$ gehen und gegebenenfalls schneller als Zähler

$\Rightarrow$ Regler $C$ muss integrierendes Verhalten haben

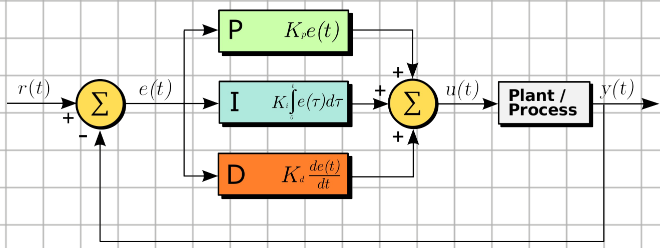
$$\lim_{s\to 0} G_{z2}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+CG} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_0} \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ offene Kette $G_0$ muss integrierendes Verhalten haben

$G_0$ integrierend $\iff$ { sprungförmige Signale am Eingang $r(t)$ werden stationär erreicht; konstante Störungen $z_2(t)$ am Systemausgang werden stationär ausgeregelt }

$C$ integrierend $\iff$ { konstante Störungen $z_1(t)$ am Systemeingang werden stationär ausgeregelt

# PID-Regler




idealer PID-Regler:

$$C(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s = \frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}$$

nicht kausal!

generelle Anforderung an geregeltes System:

(i) Stabilität: alle Pole linke Halbebene, endliche E- führt zu endlichen A-Signalen

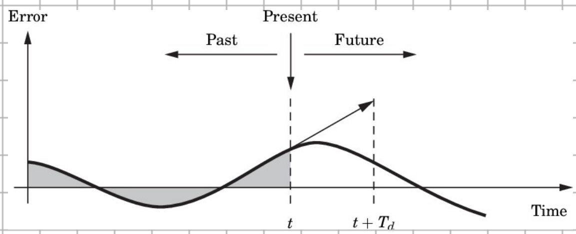
(ii) Führungsverhalten: Anstiegszeit, Überschwingweite, Bandbreite, etc.

(iii) Störverhalten: Ausregeln konstanter Störungen, etc.

(iv) Robustheit: Regler muss mit gewissen Schwankungen im realen System umgehen können

PID berücksichtigt folgende Regelfehler:

- aktuellen (P)
- vergangenen (I)
- zukünftigen (D)




$\boxed{\text{für schwach gedämpfte Strecken (dominante Pole kompl. konj.) lohnt sich D-Anteil da Systemdämpfung des geschlossenen Systems erhöht wird}}$

# P-Regler

$$C = k_P$$

falls Strecke von Form $G = \frac{n}{d} = \frac{b_q s^q + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$:

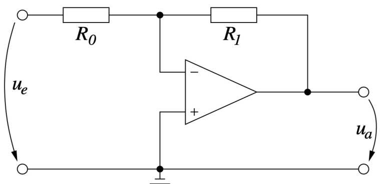
Führungsübertragungsfunktion: $G_{cl}(s) = \frac{k_P n}{d + k_P n}$

statischer Endwert: $\frac{y(\infty)}{r(\infty)} = \lim_{s \to 0} G_{cl}(s) = \frac{k_P b_0}{a_0 + k_P b_0}$

$\Rightarrow$ statischer Regelfehler: $e(\infty) = a_0$

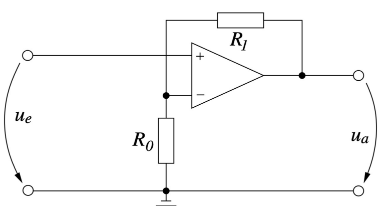
↳ gleich 0 falls $a_0 = 0$ ist (dann hat Strecke integrierendes Verhalten)

Realisierung mit OpAmp:




invertierender P-Regler:

$$k_P = -\frac{R_1}{R_0}$$

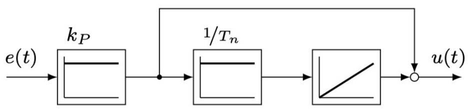



nichtinvert. P-Regler:

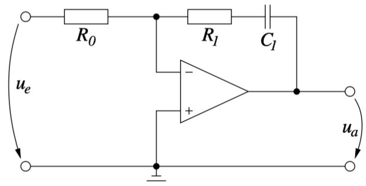
$$k_P = 1 + \frac{R_1}{R_0}$$

# PI-Regler

$$C = k_P\left(1 + \frac{1}{T_n s}\right) = k_P \frac{T_n s + 1}{T_n s}$$




Realisierung mit OpAmp:




invertierender PI-Regler:
$k_P = -\frac{R_1}{R_0}$
$T_N = R_1 C_1$

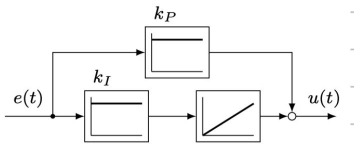
$T_n$ [s]: Nachstellzeit

bei konstanter Regelabweichung trägt nach $T_n$ Sekunden der Integralanteil gleich viel zur Steuergrösse bei wie der Proportionalanteil bzw.:

Sprungantwort des PI-Reglers beginnt bei $k_P$ und nach $T_n$ Sekunden liest der Wert bei $2k_P$

weitere Schreibweise:

$$C = k_P + \frac{k_I}{s} = \frac{k_P s + k_I}{s} \quad \text{mit} \quad k_I = \frac{k_P}{k_I}$$




PI geeignet bei proportional wirkenden, stabilen, gut gedämpften Strecken
=> alle Polstellen in linken Halbebene und nahe oder auf reellen Achse

## Kompensationsverfahren

-> zur Auslegung des PI Reglers

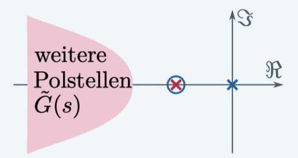



Abbildung 7.4: Die langsamste Polstelle × von $G(s)$ wird durch die Nullstelle ○ des PI–Reglers kompensiert.

Strategie:
Nachstellzeit = langsamste Zeitkonstante der Strecke

Annahme:
der zum Ursprung nächste Pol kommt einfach vor und liegt bei $-\omega_1$
-> dominierende langsame Zeitkonstante $\tau_1 = 1/\omega_1$ beeinflusst das System wesentlich

Strecke lässt sich schreiben als $G(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1}\tilde{G}(s)$

offene Kette: $G_0(s) = k_P \frac{T_n s + 1}{T_n s} \frac{1}{\tau_1 s + 1}\tilde{G}(s)$

$\boxed{T_n \overset{!}{=} \tau_1}$ => die beiden Terme kürzen sich weg:

$$G_0(s) = k_P \frac{\cancel{T_n s + 1}}{T_n s}\frac{1}{\cancel{\tau_1 s + 1}}\tilde{G}(s) = \frac{k_P}{T_n s}\tilde{G}(s) \quad \text{mit } T_n = \tau_1$$

=> PI-Regler fügt in offene Kette einen X im Ursprung und eine O bei $-1/\tau_1$ ein, welche die Polstelle der Strecke dort kompensiert

um $k_P$ zu wählen gibt es verschiedene Methoden

-> bei System 2ter Ordnung mit reellen Polen $p_{1,2}$ kann man $k_P$ bzw. so festlegen, dass die 2 verbleibenden Polstellen $\tilde{p}_{1,2}$ des geschlossenen Regelkreises aufeinander liegen (aperiodischer Grenzfall):

$$G(s) = \frac{k}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{\tau_1\tau_2 k}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \quad \text{wobei } |p_1| < |p_2| \quad \text{mit } \tau_i = \frac{-1}{p_i}$$

$$G_0(s) = C(s)\,G(s) = k_P \frac{\cancel{T_n s + 1}}{\cancel{T_n} s}\frac{\cancel{\tau_1} \tau_2 k}{\cancel{(\tau_1 s+1)}(\tau_2 s+1)} = \frac{k_P \tau_2 k}{\tau_2 s^2 + s} = \frac{n}{d}$$

$$G_{cl}(s) = \frac{n}{d+n} = \frac{k_P \tau_2 k}{\tau_2 s^2 + s + k_P \tau_2 k} = \frac{k_P k}{s^2 - p_2 s + k_P k} \Rightarrow \tilde{p}_{1,2} = \frac{p_2}{2} \pm \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{p_2^2 - 4k_P k}}_{\overset{!}{=}0}$$

$$\Rightarrow k_P = p_2^2/4k$$

$$\Rightarrow G_{cl}(s) = \frac{\frac{1}{4}p_2^2}{s^2 - p_2 s + \frac{1}{4}p_2^2}$$

# PID-Regler

I → Vermeidung statischer Regelfehler → wenig Effekt auf schnelle Veränderungen
P → Beeinflussung Pollage d. geschl. Systems (z.B. instabile Strecke ⇝ stabiler Regelkreis)
D → Störverhalten verbessern (PI sehr langsames Störverhalten)
↳ für schwach gedämpfte Strecken (dominante Pole kompl. konj.) lohnt sich D-Anteil um Dämpfung des geschl. Systems zu verbessern

$$u(t) = k_P\, e(t) + k_I \int e(t)\,dt + k_D \frac{d}{dt} e(t)$$

$$C^{id}_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_P + k_I \frac{1}{s} + k_D s$$ parallel

* falls $k_P$ gleich

$$= k_P\left(1 + \frac{1}{k_P k_I^{-1} s} + \frac{k_D}{k_P} s\right)$$

$$= k_P\left(1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s\right) \text{ mit}^* \begin{cases} \text{Nachstellzeit } T_n = k_P / k_I \\ \text{Vorstellzeit } T_v = k_D / k_P \end{cases}$$ seriell

Probleme: i) $C^{id}_{PID}(s) = \dfrac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}$ n. kausal $(q > n) \Rightarrow$ n. realisierbar

ii) $C^{id}_D(s) = T_v s$ (Ableiten) ⇒ Verstärkung Messrauschen ⇒ Aktuatoren "zittern"

Lösung: realer D-Anteil → zusätzlicher Tiefpass 1. Ordnung $\frac{1}{T_f s + 1}$

$C^{re}_D = \frac{1}{T_f s + 1} T_v s$ wobei: $T_f \ll T_v$

beim Auslegen wird meistens ein idealer D-Anteil angenommen und Zeitkonstante $T_f$ wird danach, sodass das dyn. Verhalten n. wesentlich verändert wird, festgelegt
↳ $T_f \ll T_v \Leftrightarrow |p_f| \gg |p_i|$ (Pol des Filters weit weg von Systempolen)

$$\boxed{C^{re}_{PID} = k_P + k_I \frac{1}{s} + k_D \frac{s}{T_f s + 1} = k_P\left(1 + \frac{1}{T_n s} + \frac{T_v s}{T_f s + 1}\right)}$$

→ Filterzeitkonstante $T_f$ so wählen, dass relevanter Teil d. Frequenzganges n. beeinflusst wird: typischerweise 1 bis 2 Dekaden Abstand zw. höchster relevanten Frequenz und Eckfrequenz d. Filters
→ weiterer Vorteil: sehr hohe Frequenzen n. zu stark von D-Anteil verstärkt ⇒ verbessertes Rauschverhalten

## Auswahl geeigneter Regler

Von einem **PT1 Glied** spricht man bei einem System mit der Übertragungsfunktion

$$\boxed{G(s) = \frac{k}{T_1\, s + 1}}$$

mit Proportionalanteil $k$ und einem dynamischen Verhalten erster Ordnung, dargestellt durch die Zeitkonstante $T_1$. Dieses lässt sich auch in der Form

$$G(s) = \frac{\tilde{k}}{s + \alpha}$$

darstellen. Bei einem **PT2 Glied** spricht man bei einem System mit der Übertragungsfunktion

$$\boxed{G(s) = \frac{k\,\omega_0^2}{s^2 + 2\,\xi\omega_0\, s + \omega_0^2}}$$

mit Proportionalanteil $k$ und einem dynamischen Verhalten zweiter Ordnung. Dabei sind die Pollagen komplex konjugiert (Dämpfung $0 < \xi < 1$). Sind die Pollagen bei einem System zweiter Ordnung reell, so wird diese mit zwei PT1 Gliedern in Serie beschrieben.

System dominant 1ter Ordnung:

$$G(s) = \frac{\tilde{k}}{s+\alpha} G_{Rest}(s) \approx \frac{\tilde{k}}{s+\alpha}$$

→ P-Regler: $G_{cl}(s) = \dfrac{\tilde{k} k_P}{s + \alpha + \tilde{k} k_P} \Rightarrow p = -\alpha - \tilde{k} k_P$

System dominant 2ter Ordnung:

$$G(s) = \frac{k}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)} \cdot G_{Rest}(s) \approx \frac{k}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$$

→ PD-Regler: $G_{cl}(s) = \dfrac{k k_P (1 + T_v s)}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2) + k k_P (1 + T_v s)}$

$$\Rightarrow p_{1,2} = -\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + T_v k k_P) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + T_v k k_P)^2 - 4(\alpha_1\alpha_2 + k k_P)}$$

falls $G(s)$ stabil → P-Regler geht auch, hat aber Nachteile

falls statischer Regelfehler nicht erlaubt → I-Anteil
I-Anteil kein eigentlicher freier Einstellparameter → im Gegenteil, da man dem System einen zusätzlichen Speicher zufügt, wird Systemordnung um 1 erhöht
⇒ I-Anteil verbraucht einen freien Parameter selbst

# Einstellverfahren mittels Polvorgabe

für System $2^{ter}$ Ordnung $\quad G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$

$$G_{cl}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s} \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}}{1 + \frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s} \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}}$$

$$1 + C(s)G(s) \overset{!}{=} 0 \iff \cdots \iff \boxed{s^3 + (a_1 + b_0 k_D) s^2 + (a_0 + b_0 k_P) s + b_0 k_I \overset{!}{=} 0}$$

Wunschpolynom: $(s + \Omega_1)(s + \Omega_2)(s + \Omega_3) \overset{!}{=} 0$

einfacher: $(s + \Omega)^3 = \boxed{s^3 + 3\Omega s^2 + 3\Omega^2 s + \Omega^3 \overset{!}{=} 0}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} k_I &= \frac{1}{b_0} \Omega^3 \\ k_P &= \frac{1}{b_0}(3\Omega^2 - a_0) \\ k_D &= \frac{1}{b_0}(3\Omega - a_1) \end{aligned}}$$

$$\boxed{C(s) = k_P + k_I \frac{1}{s} + \frac{1}{T_f s + 1} k_D s}$$

# Stabilitätskriterium nach Nyquist

gbr. rat. UTF können mit Hurwitz auf Stabilität untersucht werden

ABER: nicht geeignet um Regelgüte vorzugeben und Regler danach zu dimensionieren
+ ausserdem keine Anwendbarkeit für n. gebr. rat. UTFs

→ Nyquist: basiert auf Ortskurve d. Frequenzgangs d. offenen Kette
→ auch für n.g.r. UTFs wie z.B. Totzeit

## Totzeitglied

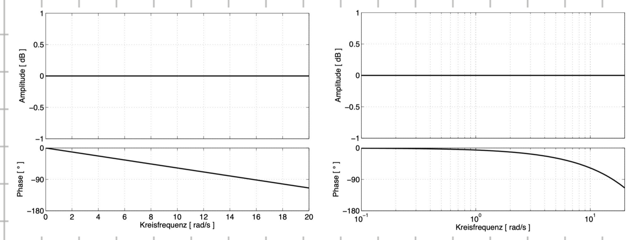
spezielles LTI, welches Systemeingang unverändert lässt und lediglich um Wert $T_t$ verzögert, $y(t) = u(t - T_t)$

UTF: $G(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st}\delta(t - T_t)\,dt = e^{-sT_t}$

Frequenzgang: $G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$

$|G(j\omega)| = 1$ → konstant (Allpass)

$\angle G(j\omega)$ fällt mit $-T_t$ ab




$$\boxed{\angle G(j\omega) = \frac{(T - T_t) - T}{T} \cdot 360° = -\frac{T_t}{T} 360° = -T_t f\, 360° = -T_t \frac{\omega}{2\pi} 360°}$$

→ bei $\omega = 1/T_t$ ⇒ $\angle = -\frac{360°}{2\pi} \approx -57°$

bei (heutig meist verwendeten) digitalen Regelsystemen bspw. Zeit zum Wandeln der Signale und Kommunikationszeit

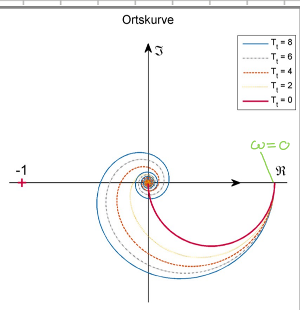
## Ortskurve

**Beispiel: System 1. Ordnung mit Totzeit**

Ein System 1. Ordnung habe die Übertragungsfunktion mit variabler Totzeit $T_t$:

$$G(s) = e^{-s\,T_t} \frac{1}{10s + 1}$$

Die Abbildung rechts zeigt die Ortskurve (oder auch Nyquistdiagramm) der offenen Kette für $T_t = 0$ (rot) und für vier verschiedene Totzeiten. Man beachte, dass die Ortskurven alle am gleichen Ort beginnen (da für $\omega = 0$ die Totzeit keine Phasendrehung verursacht). Die Totzeit führt zu einem spiralartigen Verlauf für hohe $\omega$-Werte.




Frequenzgang aus lgDgl:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_q u^{(q)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

falls $u = Ue^{j\omega t}$ ⇒ $y = Ye^{j\omega t}$

da $\frac{d^n}{dt^n}(e^{j\omega t}) = (j\omega)^n e^{j\omega t}$ folgt:

$$Y(a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0) e^{j\omega t} = U(b_q (j\omega)^q + \dots + b_1 j\omega + b_0) e^{j\omega t}$$

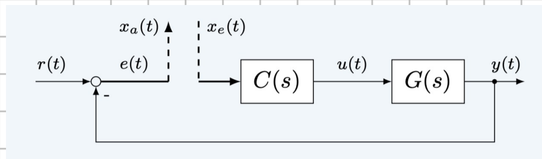
$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0}{b_q (j\omega)^q + \dots + b_1 j\omega + b_0}$$

Frequenzgangs kann auch mit Ortskurve (Nyquistdiagramm) (anstatt Bode) dargestellt werden:

→ $\omega$ zwischen $-\infty$ und $\infty$ variieren und $G(j\omega)$ in komplexer Ebene einzeichnen

Bemerkungen:
- $G(-j\omega) = G(j\omega)$
- Linienstücke für ein $\Delta\omega$ n. gleich lang!

# vereinfachtes Nyquistkriterium




wenn man Kreis bei Reglereingang auftrennt und $r(t) \equiv 0$ setzt ergibt sich neuer Eingang $x_e(t)$ und Ausgang $x_a(t)$

Wirkungskette $x_e(t) \to x_a(t)$ wird harmonisch angeregt mit $x_e(t) = \hat{x}_e \cos(\omega_p t)$

nach Abklingen Einschaltverhalten ist auch $x_a$ harmonische Schwingung $\hat{x}_a \cos(\omega_p t - \varphi_a)$

nun sucht man Schwingung bei welcher $\hat{x}_a(t) \overset{!}{=} \hat{x}_e(t)$ resp $\hat{x}_a = \hat{x}_e$, $\varphi_a = 0$

→ dann kann man gedanklich d. Kreis schliessen und bestehende Schwingung bleibt bestehen

→ für $y(t) = \hat{y} \cos(\omega_p t - \varphi)$ ist dann $\hat{y} = \hat{x}_e$, $\varphi = -180°$

$\boxed{\text{kritische Kreisfrequenz } \omega_{krit}: \ \omega_p \text{ bei der } \varphi = -180°}$

Betrachtung der Amplituden $\hat{x}_a$, $\hat{x}_e$ bei $\omega_{krit}$:

- falls $\hat{y} / \hat{x}_e = \hat{x}_a / \hat{x}_e < 1 \Rightarrow$ Schwingung regeneriert sich nicht $\Rightarrow$ klingt ab
- falls $\hat{y} / \hat{x}_e = \hat{x}_a / \hat{x}_e > 1 \Rightarrow$ Schwingung bei jedem Umlauf ↑ $\Rightarrow$ oszillatorisch instabil

System liegt also gerade an Stabilitätsgrenze falls Kreisfrequenz $\omega_{krit}$ existiert, für welche der Frequenzgang von $G_0$ gerade $= -1$ wird

Punkt „-1" in komplexer Ebene daher besondere Bedeutung («Nyquistpunkt»)
→ wenn Ortskurve durch diesen Punkt verläuft ⇒ Sys. an Stabilitätsgrenze

falls $G_0$ selbst „stabil" (salopp!) ist gilt das...

vereinfachte Nyquistkriterium

> geschlossener Regelkreis genau dann stabil, wenn der Punkt $(-1; 0j)$ in Ortskurvendarstellung d. offenen Regelkreises $G_0$ bei ansteigendem $\omega$ links von der Ortskurve liegt

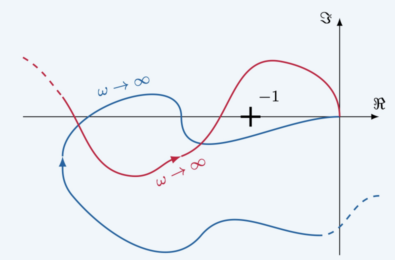



Abbildung 8.7: Ortskurve zweier offenen Ketten $G_0$. Das geschlossene System ist bei der blauen Ortskurve stabil, bei der roten instabil.

oben salopp „stabil", genaue Bedingungen:

Bedingungen an $G_0$ für Anwendbarkeit

> - kein Pol in rechter Halbebene
> - maximal 2 Polstellen im Ursprung
> - System nicht sprungfähig ($q < n$ (anstatt $q \leq n$))

***Beispiel:* System 1. Ordnung mit Totzeit**

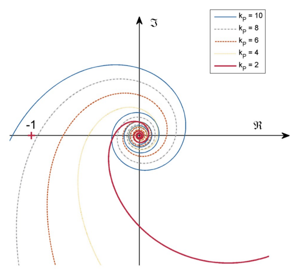
Ein System 1. Ordnung habe die Übertragungsfunktion mit Totzeit $T_t = 2s$:

$$G(s) = e^{-s\,T_t} \frac{1}{10s+1}$$

Die Frage stellt sich, für welche Reglerwerte $k$ ist dieses System im geschlossenen Kreis stabil. Die offene Kette hat also die Übertragungsfunktion

$$G_0(s) = e^{-s\,T_t} \frac{k}{10s+1}.$$

Die Abbildung rechts zeigt den wichtigen Ausschnitt der Ortskurve der offenen Kette für verschiedene $k$'s. Die Totzeit führt zu einer spiralartigen Verlauf für hohe $\omega$-Werte. Die offene Kette, bleibt für $k$-Werte bis etwa 8 stets zur Rechten vom kritischen Punkt -1 und ist für diese Werte also stabil.

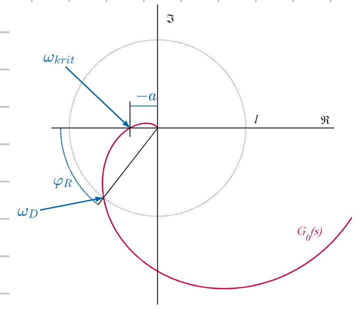



Vorteile Nyquistkriterium:

- Frequenzgang am offenen Kreis experimentell einfach bestimmbar
- gilt auch für Systeme mit Totzeit
- Hintereinanderschalten verschiedener Syst. durch Frequenzgänge einfach konstruierbar

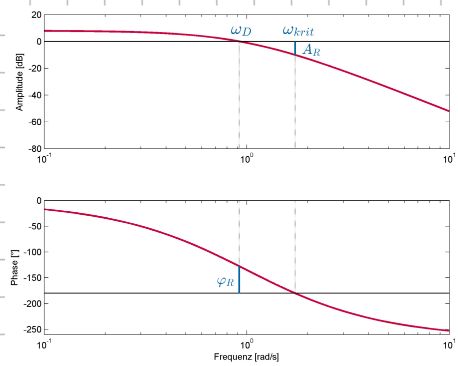
# Frequenzkennlinienverfahren

basiert auf vereinf. Nyq.krit., aber für Bodediagramm




(vereinf.) Nyquistkriterium besagt, dass bei $-180°$ das Verhältnis $\hat{y}/\hat{x}_e < 1$ sein muss damit stabiles System vorhanden ist

Bedingung kann man auch umdrehen und sagen dass Phasendrehung noch nicht $-180°$ erreicht haben darf:




vereinfachte Nyquistkriterium im Bodediagramm

> $G_0$ besitze nur Pole in LHE ausser evt. einem einfachen oder doppelten im Ursprung
>
> → dann ist $G_{cl}$ nur dann asymptotisch stabil wenn $G_0(j\omega)$ bei Durchtrittfreq. $\omega_D$, i.e. $|G_0(j\omega_D)| = 0dB$, Phase $\varphi(\omega_D) = \arg(G_0(j\omega_D)) > -180°$ hat

Durchtritt Ortskurve Einheitskreis in Nyquistplot $\hat{=}$ Durchtritt 0dB Linie im Bodeplot

Merksatz:

> «je weiter weg Phase bei $\omega_D$ von $-180°$ und je kleiner Amplitudenverhältnis bei $\omega_{krit}$ ist, desto rascher konvergiert geschlossene System»

daraus ergeben sich 2 wichtige Gütekriterien um Regler auszulegen:

Phasenreserve $\varphi_R := 180° + \angle G_0(\omega_D)$

Amplitudenreserve $A_R := 1 / |G_0(\omega_{krit})|$

| Erfahrungswerte: | Führungsverhalten | Störverhalten |
|---|---|---|
| Phasenreserve | $40° \ldots 60°$ | $20° \ldots 50°$ |
| Amplitudenreserve [Faktor] | $4 \ldots 10$ | $1.3 \ldots 3.0$ |
| Amplitudenreserve [dB] | $12 \ldots 20$ | $3.5 \ldots 9.5$ |

Erfahrungswerte $\hat{=}$ brauchbare Dämpfung d. dominanten Verhaltens im geschlossenen Kreis

→ in Praxis oft beide Verhalten wichtig, so dass Kompromiss gewählt wird:

$$\boxed{\varphi_R \approx 45°, \quad A_R = 3 \ldots 4}$$

## Gestaltung d. offenen Kette

$$G_0(s) = C(s) \cdot G_{SG}(s) \cdot G(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s) = \prod_{i=1}^{n} |G_i(s)| e^{j\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega)\right)}$$

$$\Rightarrow |G_0(j\omega)|_{dB} = \sum_{i=1}^{n} |G_i(j\omega)|_{dB}, \quad \varphi_0(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega)$$

→ offene Kette setzt sich aus n Teilfrequenzgängen zusammen

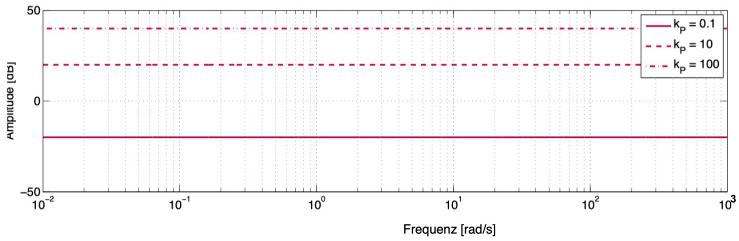
→ graphisch kann man Regler $C(s)$ also so bestimmen, dass ein gewünschter Frequenzgang d. Superposition d. Regler- und Streckenfrequenzganges entsteht

# Bodediagramme d. wichtigsten Regler

## P-Regler:

$C(s) = k_P$

Phasengang konstant 0

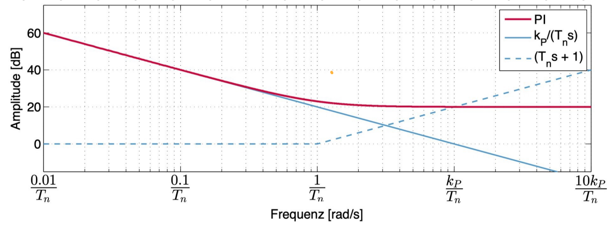


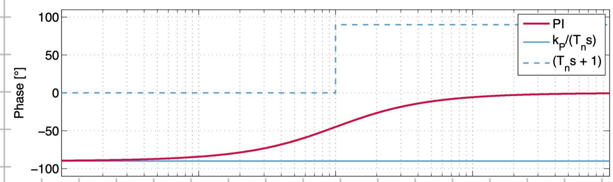

## PI-Regler:

$$C(s) = k_P + k_I \frac{1}{s}$$

$$= k_P\left(1 + \frac{1}{T_n s}\right) \quad \text{wobei } T_n = \frac{k_P}{k_I}$$

$$= \frac{k_P}{T_n s} \cdot (T_n s + 1)$$




## PID-Regler:

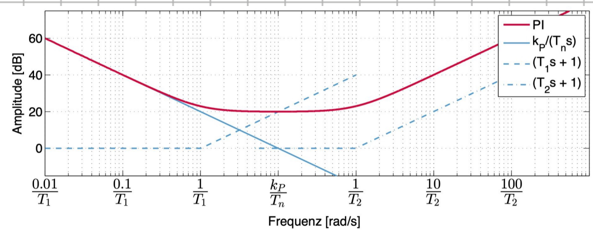
$$C(s) = k_D s + k_P + k_I \frac{1}{s}$$

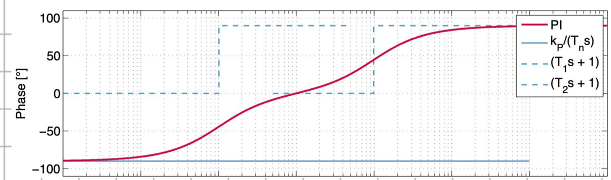
$$= k_P\left(T_v s + 1 + \frac{1}{T_n s}\right) \quad \text{wobei } T_n = \frac{k_P}{k_I},\ T_v = \frac{k_D}{k_P}$$

$$= \frac{k_P}{T_n s}\left(T_n T_v s^2 + T_n s + 1\right)$$

$$= \frac{k_P}{T_n s} \cdot (T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1) \quad \text{wobei } T_n = T_1 + T_2,\ T_v = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

realisierbarer PID-Regler → TP in D-Pfad




## Lead-Glied → für Phasenvoreilung

$$C(s) = \frac{sT + 1}{s\alpha T + 1} \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1$$ → sonst n. voreilend

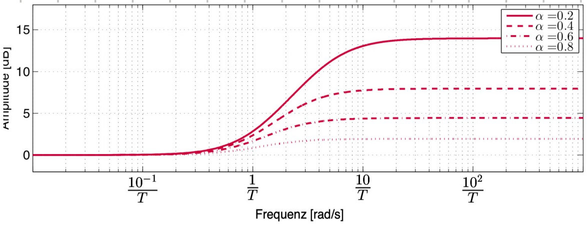
→ hat Nullstelle und TP (ähnlich wie beim Kompens.-R.)

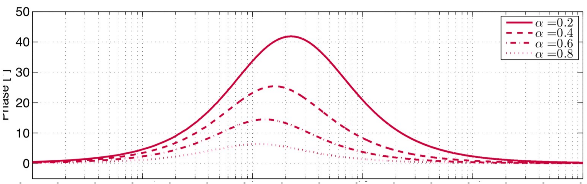
wird i.d.R. mit P-Regler kombiniert:

$$\tilde{C}(s) = k_P \frac{sT + 1}{s\alpha T + 1}$$

gleicher Frequenzgang wie realisierbarer PD:

$$\tilde{C}(s) = k_P\left(1 + \frac{sT_v}{sT_f + 1}\right) = k_P \frac{s(T_f + T_v) + 1}{sT_f + 1}$$



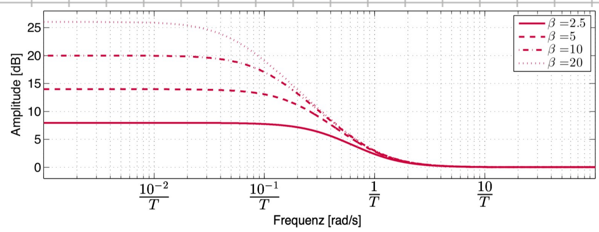

## Lag-Glied → für Phasennacheilung:

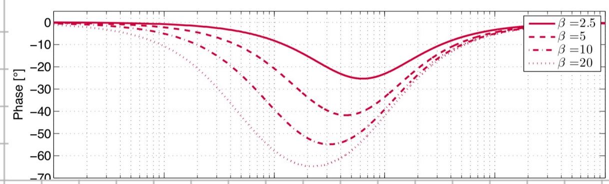
$$C(s) = \beta \frac{sT + 1}{s\beta T + 1} \quad \text{mit } \beta > 1$$ → sonst n. nacheilend

für $\beta \to \infty$ strebt Lag-Glied gegen PI

Lag-Glied wird eingesetzt um Amplitudengang im Bereich bis $\frac{1}{T}$ anzuheben

↳ Vorteil: bleibender Regelfehler klein, ohne dass man sehr grosse $k_P$ wählen muss



Lead und Lag eignen sich für Regelstrecken dominant $1^{ter}$ und $2^{ter}$ Ord. mit unterschiedlichen Zeitkonstanten (wie bspw. in Antriebstechnik vorkommen)
→ bei stark davon abweichenden Stellverhalten erfahrungsgemäss nicht geeignet

## generelle Regeln bei Gestaltung der offenen Kette

Annahme: geregeltes System $G_{cl}(s)$ näherungsweise durch System $2^{ter}$ Ordnung mit proportionaler Verstärkung von 1 beschreibbar:

$$G_{cl}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

da aus Rückkopplung mit offener Kette $G_0(s)$ entsteht muss gelten:

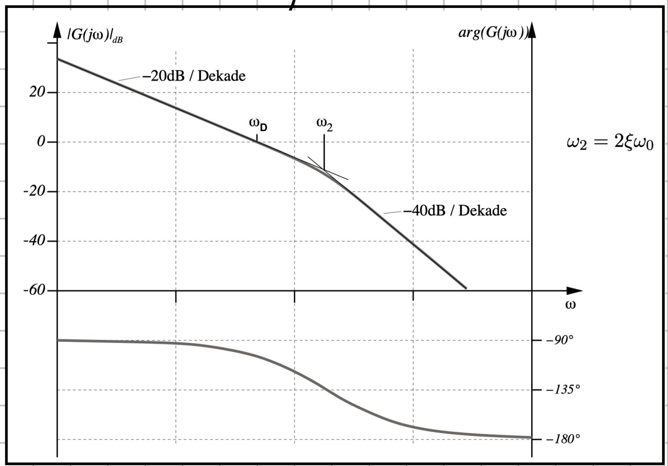
$$G_{cl} \overset{!}{=} \frac{G_0}{1+G_0}$$

$$\Rightarrow G_0(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s} = \frac{\omega_0^2}{s(s+2\xi\omega_0)}$$

$$= \frac{1}{\frac{s}{\frac{\omega_0}{2\xi}}} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{2\xi\omega_0}} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_2}}$$

→ offene Kette hat $IT_1$-Verhalten

falls $\xi$ gross $\Rightarrow \omega_D \approx \omega_1$



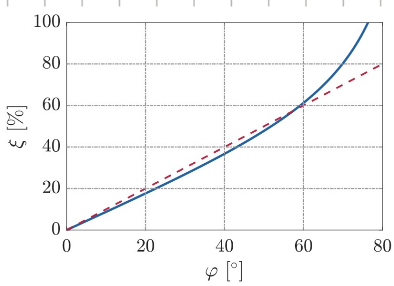

Zusammenhang Dämpfung und Phasenreserve:

$$|G_0(j\omega)|_{\omega=\omega_0} \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_D = \omega_0\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1} - 2\xi^2}$$

$$\varphi_R = \pi - |\angle G_0(j\omega_D)| = \arctan(2\xi\omega_0/\omega_D)$$

$$= \arctan\left(2\xi/\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1} - 2\xi^2}\right) \approx \frac{2\pi}{360°} \cdot 100\%\,\xi$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi \text{ in Prozent } \approx \varphi_R \text{ in Grad}}$$




Zusammenhang Bandbreite und Durchtrittsfrequenz:

$$\omega_D = \omega_0\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1} - 2\xi^2}$$

$$\Rightarrow \omega_D|_{\xi\to 0} = \omega_0, \quad \omega_D|_{\xi\to 1} \approx 0.5\,\omega_0$$

⇒ für schlecht gedämpfte Syst. $\omega_B > \omega_D \approx \omega_0$ wegen Überhöhung im Amplitudengang, für gut gedämpfte Syst. $\omega_B < \omega_0$, da keine Überhöhung

aber: $\omega_B/\omega_D$ immer $1.33 < \frac{\omega_B}{\omega_D} < 1.62$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_B \approx 1.5\,\omega_D}$$

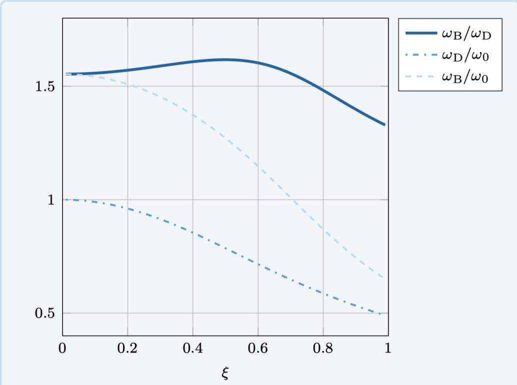


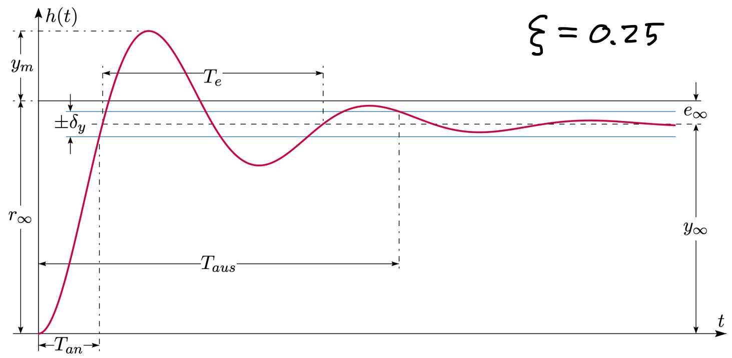

Abbildung 9.15: Relation der Bandbreite $\omega_B$ und der Eigenfrequenz $\omega_0$ des geschlossenen Systems, das als System $2^{ter}$ Ordnung approximiert wurde, sowie der Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ der offenen Kette als Funktion der Dämpfung $\xi$.

# Entwurf von Linearen Regelkreisen

## Gütekriterien Zeitverhalten

selbstredend: Stabilität immer wichtig

$$\boxed{G_{cl} \approx k_{DC} \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}$$




statischer Regelfehler $e_\infty$:

falls weder Strecke noch Regler integrierend (aus dynamischen Gründen teilweise notwendig)

=> $k_{DC} = \lim_{s\to 0} G_{cl}(s) \neq 1$ => $e_\infty = r_\infty - y_\infty = r_\infty - k_{DC} r_\infty = r_\infty (1 - k_{DC})$

=> $\frac{e_\infty}{r_\infty} = 1 - k_{DC}$ typischerweise proportional zu $\frac{1}{1+k}$ mit $k = \lim_{s\to 0} G_0(s)$

→ für $k \gg 1$ => $e_\infty = 0$ aber: kann zu Instabilitäten führen, da Amplitudenreserve schnell klein wird

Überschwingweite $y_m$:

$$\boxed{y_m = y_{max} - y_\infty \quad \text{resp.} \quad y_m^{\%} = 100\% \, y_m / y_\infty}$$

Dämpfung $\xi$:

Eigenfrequenz $\omega_0 = 2\pi / T_e$

=> Schwingungsperiode $\boxed{T_e = 2\pi / \omega_0}$

Anzahl sichtbarer Halbwellen $n = \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - 1}$

=> $\boxed{\xi = 1/\sqrt{n^2 + 1} \approx \frac{1}{n}}$

Ausregelzeit $T_{aus}$:

Zeit bis $y(t)$ Band $y_\infty \pm \delta y$ n. mehr verlässt

$\delta y = 1\% \ldots 5\%$ von $y_\infty$

Anregelzeit $T_{an}$: verschiedene Definitionen:

i) Zeit bis 1tes mal in Band $y_\infty \pm \delta y$

ii) Zeit um von $10\% \, y_\infty$ bis $90\% \, y_\infty$

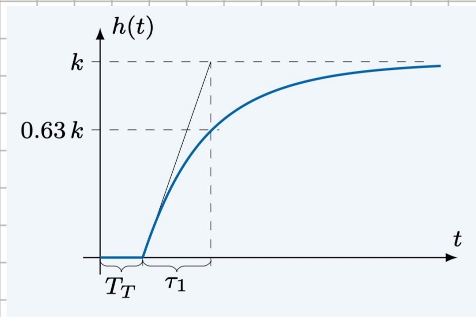
iii) Zeit um von $0\% \, y_\infty$ bis $63\% \, y_\infty$

# Ziegler-Nichols (ZN)

empirisch gefundene Werte (Chemieindustrie) → für mechatr. Systeme teilweise teilweise zu stark oszillierend, da schnellere Systeme (geringerer Ordnung) als in Chemie

man approximiert Regelstrecke durch $PT_1 - T_T$ - Glied: $\boxed{G(s) \approx k e^{-sT_T} \frac{1}{s\tau_1 + 1}}$

Voraussetzungen:
- Regelstrecke stabil
- keine grosse Anforderungen an Regelgüte
- $0.1 \leq T_T/\tau_1 \leq 1.0 \iff 1.0 \leq \tau_1/T_T \leq 10.0$




## Verfahren 1

Voraussetzungen:
- Sprungantwort der Strecke ermittelt worden
- Sprungantwort kann durch $PT_1 - T_T$ - Glied angenähert werden

Vorgehen:
1. $k, \tau_1, T_T$ an Sprungantwort ablesen
2. Parameter gemäss Tabelle bestimmen

| Regler | $k_P$ | $T_n$ | $T_v$ |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{\tau_1}{k\,T_T}$ | – | – |
| PI | $0.9\frac{\tau_1}{k\,T_T}$ | $3.33\,T_T$ | – |
| PID | $1.2\frac{\tau_1}{k\,T_T}$ | $2\,T_T$ | $0.5\,T_T$ |

## Verfahren 2

Vorgehen:
1. Regelstrecke zunächst mit P-Regler betreiben und $k$ so lange erhöhen bis Stabilitätsgrenze erreicht (dazu muss System ggf. z.B. durch Pulsfolge angeregt werden
2. Stabilitätsgrenze wird bei $K_{krit}$ erreicht, dann tritt eine Dauerschwingung mit Periode $T_{krit} = 2\pi/\omega_{krit}$
3. Parameter gemäss Tabelle bestimmen

| Regler | $k_P$ | $T_n$ | $T_v$ |
|---|---|---|---|
| P | $0.5 \cdot K_{\text{Krit}}$ | – | – |
| PI | $0.45 \cdot K_{\text{Krit}}$ | $0.83 \cdot T_{\text{Krit}}$ | – |
| PID | $0.6 \cdot K_{\text{Krit}}$ | $0.5 \cdot T_{\text{Krit}}$ | $0.125 \cdot T_{\text{Krit}}$ |

Bemerkung → hat man vom System Frequenzgang kann man auch diesen benutzen:
- $\omega_{krit}$ entspricht der aus Nyquist-Kriterium kritischen Kreisfrequenz
- $K_{krit}$ entspricht der Amplitudenreserve

# Chien, Hrones und Resnick (CHR)

anwenden falls Resultate mit ZN zu stark oszillierend

Vorgehen: wie ZN 1 aber andere Tabelle

ergeben bessere Dämpfung aber auch höheren maximalen Regelfehler

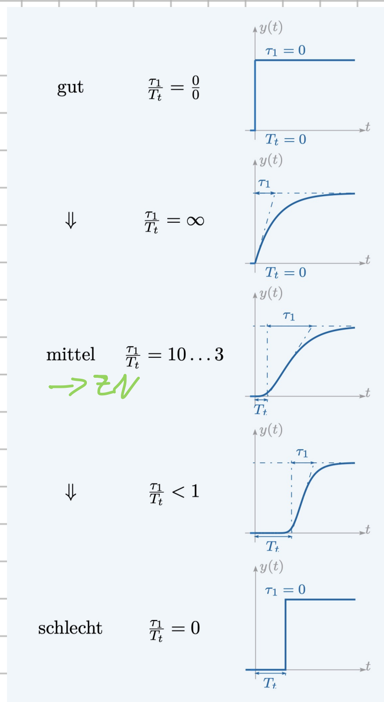
| | Aperiodischer Regelvorgang | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Führung | | | Störung | | |
| Regler | $k_P$ | $T_n$ | $T_v$ | $k_P$ | $T_n$ | $T_v$ |
| P | $\frac{0.3\,\tau_1}{k\,T_T}$ | – | – | $\frac{0.3\,\tau_1}{k\,T_T}$ | – | – |
| PI | $\frac{0.35\,\tau_1}{k\,T_T}$ | $1.2\,\tau_1$ | – | $\frac{0.6\,\tau_1}{k\,T_T}$ | $4\,T_T$ | – |
| PID | $\frac{0.6\,\tau_1}{k\,T_T}$ | $\tau_1$ | $\frac{1}{2}\,T_T$ | $\frac{0.95\,\tau_1}{k\,T_T}$ | $2.4\,T_T$ | $0.42\,T_T$ |

| | Regelvorgang mit 20% Überschwingen | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Führung | | | Störung | | |
| Regler | $k_P$ | $T_n$ | $T_v$ | $k_P$ | $T_n$ | $T_v$ |
| P | $\frac{0.7\,\tau_1}{k\,T_T}$ | – | – | $\frac{0.7\,\tau_1}{k\,T_T}$ | – | – |
| PI | $\frac{0.6\,\tau_1}{k\,T_T}$ | $\tau_1$ | – | $\frac{0.7\,\tau_1}{k\,T_T}$ | $2.3\,T_T$ | – |
| PID | $\frac{0.95\,\tau_1}{k\,T_T}$ | $1.35\tau_1$ | $0.47\,T_T$ | $\frac{1.2\,\tau_1}{k\,T_T}$ | $2.3\,T_T$ | $0.42\,T_T$ |

# Regelbarkeit

$\boxed{\text{Verhältnis } \frac{\tau_1}{T_t}}$ $\tau_1 \hat{=}$ Anstiegszeit / dominante Zeitkonstante

je besser Regelbarkeit, desto grösser darf Verstärkung d. Reglers gewählt werden




# Approximation d. Totzeitglieds

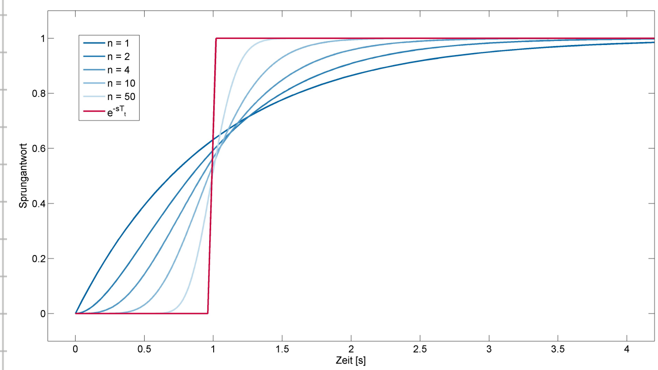
alle kleinen Zeitkonstanten mit Ersatztotzeit approximieren ist plausibel:

$$G(s) \overset{RT}{:=} e^{-sT_t} \overset{MATH}{:=} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{-sT_t}{n}\right)^n$$

mit bernoullischen Ungleichung folgt:

$$e^{-sT_t} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{-sT_t}{n}\right)^n \overset{Bern.}{\lesssim} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{-sT_t}{n}\right)^n} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{sT_t}{n}\right)^n}$$

Totzeitglied kann also d. Reihenschaltung von $n$ TP-Gliedern 1ter O. approximiert werden




Umgekehrt kann man salopp formulieren, dass Reihenschaltung vieler kleiner Zeitkonstanten im System einer Totzeit entspricht

Bemerkung:
diese Approximation führt schnell zu Systemen hoher Ordnung
für Reglerauslegung sind oft aber Systeme niedriger Ordnung vorteilhaft
→ Padé Approximation

Padé Appr. 1ter O.:

$$\boxed{e^{-sT_t} \approx \frac{1 - \frac{T_t}{2}s}{1 + \frac{T_t}{2}s}}$$

Padé Appr. 2ter O.:

$$\boxed{e^{-sT_t} \approx \frac{1 - \frac{T_t}{2}s + \frac{T_t^2}{12}s^2}{1 + \frac{T_t}{2}s + \frac{T_t^2}{12}s^2}}$$

# Übersicht Einstellverfahren

Kompensationsverfahren (KV)
Polvorgabe (PV)
Frequenzkennlinienverfahren (FKV)
Ziegler-Nichols (ZN)
Chien, Hrones & Reswick (CHR)

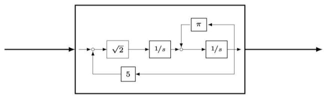
| | System Beschreibung | Streckencharakteristik | Reglertyp | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|
| KV | $G(s)$ oder $G(j\omega)$ | Dominant 1. Ordnung | PI | Mässiges Störverhalten, dominante Zeitkonstante kompensieren. |
| PV | $G(s)$ | PT1, PT2, IT1, …(alle bis und mit 2. Ordnung) | P, PD, PI, PID | Eventuell nicht dominante Systemteile vernachlässigen, sehr flexibel, Pole müssen nicht an die gleiche Stelle gelegt werden. Verfahren kann Erweitert werden für Systeme Ordnung > 2 (Zustandsregelung). |
| FKV | $G(j\omega)$ | alle | P, PD, PI, PID, lead, lag | Gutes Verfahren wenn Frequenzgang vorhanden. |
| ZN ↳ neigt zu Schwingen | $h(t)$ oder $G(j\omega)$ | PT1 plus Totzeit | P, PI, PID | Eigentlich nur Störverhalten und $0.1 < \frac{T_t}{\tau_1} < 1$ was bei mechatronischen Systemen eher selten ist. Dämpfung eher mässig. Sehr einfaches Verfahren. |
| CHR | $h(t)$ | PT1 plus Totzeit | P, PI, PID | Besser gedämpft als ZN und eignet sich besser für typische mechatronische Systeme. Sehr einfaches Verfahren. |

# Modellidentifikation

## Modellklassifizierung

**White Box / Glass Box**
→ oft schwierig

- First Principles
- Struktur bekannt
- Parameter haben physikalische Bedeutung

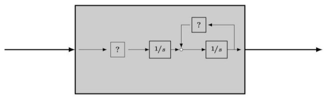



**Black Box**
→ eher selten in RT

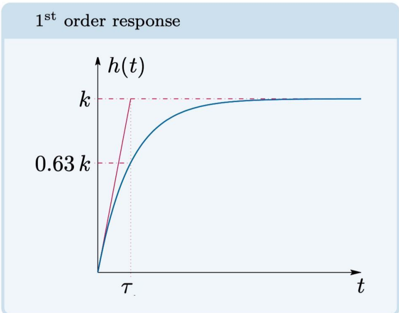
- Struktur unbekannt
- Parameter keine physikalische Bedeutung

**Gray Box**
→ häufigster Fall in RT
→ zB Ziegler-Nichols

- teilweise auf First Principles basierend
- Struktur teilweise bekannt
- Vereinfachungen



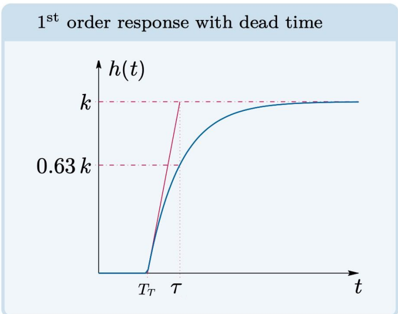

## Systemidentifikation im Zeitbereich




$$\boxed{G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}}$$

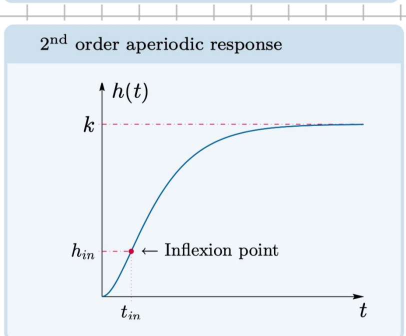
$$h(t) = \sigma(t) * g(t) \quad ○\!\!-\!\!● \quad H(s) = \frac{1}{s} G(s)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} G(s)\right\} = k\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$




$$\boxed{G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-T_T s}}$$

→ Ziegler-Nichols




Ansatz: $\boxed{G(s) = k \frac{1}{\tau_1 s + 1} \frac{1}{\tau_2 s + 1}}$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} G(s)\right\} = k\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2}\right) \text{ für } \tau_1 \neq \tau_2$$

Wendepunkt bei: $h_{in} = h(t_{in}) \Rightarrow \ddot{h}(t_{in}) \overset{!}{=} 0$

mit $x \overset{\text{Subst.}}{:=} \frac{\tau_1}{\tau_2}$ folgt $\boxed{\tau_1 = \frac{t_{in}(x-1)}{\ln(x)} \quad \& \quad \frac{h_{in}}{k} = 1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}}$

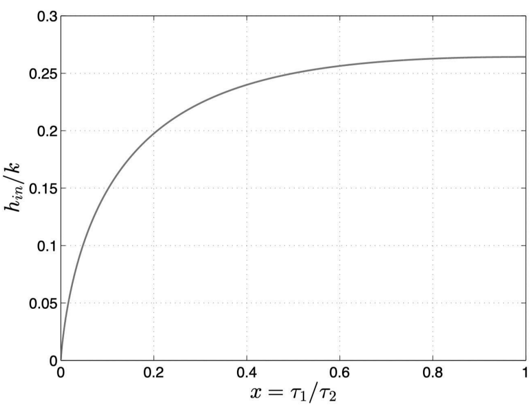
somit kann man $\tau_1$ & $\tau_2$ folgendermassen bestimmen

i) $k, t_{in}, h_{in}$ aus Schrittantwort

ii) $x$ aus Tabelle / Graph

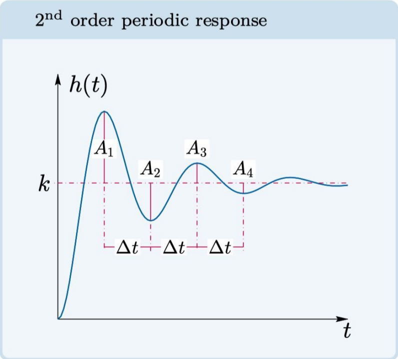
iii) $\tau_1 = \frac{t_{in}(x-1)}{\ln(x)}$

iv) $\tau_2 = \tau_1 / x$




| $x$ | $h_{in}/k$ |
|---|---|
| 0.0 | 0 |
| 0.05 | 0.1032 |
| 0.1 | 0.1483 |
| 0.15 | 0.1772 |
| 0.2 | 0.1975 |
| 0.25 | 0.2125 |
| 0.3 | 0.2240 |
| 0.35 | 0.2329 |
| 0.4 | 0.24 |
| 0.45 | 0.2455 |
| 0.5 | 0.25 |
| 0.55 | 0.2536 |
| 0.6 | 0.2564 |
| 0.7 | 0.2604 |
| 0.8 | 0.2627 |
| 0.9 | 0.2639 |

falls $\frac{h_{in}}{k} > 0.2639 \Rightarrow$ Ordnung $> 2$




$$\boxed{G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}$$

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; h(t) = k\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\, t + \arccos\xi\right)\right)$$

$$\Lambda := \ln\frac{A_{k+1}}{A_k} = -\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \implies \xi = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2/\Lambda^2}}$$

$$\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,\Delta t \overset{!}{=} \pi \implies \omega_0 = \frac{\pi}{\Delta t\sqrt{1-\xi^2}}$$

somit kann man $\omega_0$ & $\xi$ folgendermassen bestimmen

i) $k$ aus Schrittantwort

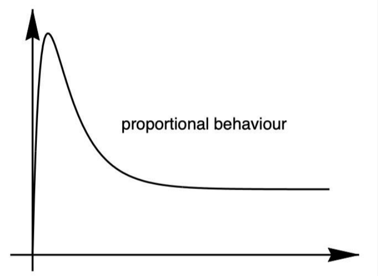
ii) mehrere $A_k$ bestimmen, logarithm. Dekremente davon, Mittelwert $\bar{\Lambda}$ davon

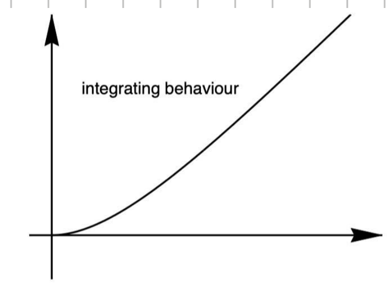
iii) $\xi = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2/\bar{\Lambda}^2}}$

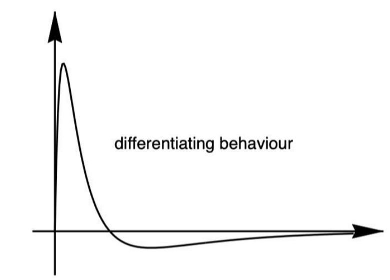
iv) mehrere $\Delta t$ bestimmen, Mittelwert $\overline{\Delta t}$ davon

v) $\omega_0 = \frac{\pi}{\overline{\Delta t}\sqrt{1-\xi^2}}$

allgemeines Systemverhalten



# Systemidentifikation im Frequenzbereich

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = A(j\omega)e^{j\phi}}$$

stabiles System (Anregung mit Sinus):

$u(t) = \alpha_u \sin(\omega_k t) \Rightarrow y(t) = \alpha_y \sin(\omega_k t + \phi_k)$

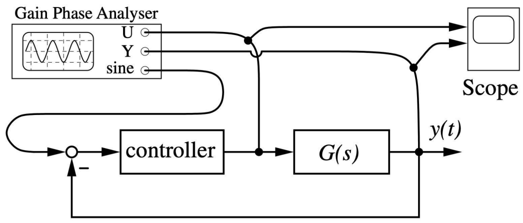
$U(s) = \omega_k / (s^2 + \omega_k^2) \qquad Y(s) = \alpha_y (s \sin\phi_k + \omega_k \cos\phi_k)/(s^2 + \omega_k^2)$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\alpha_y}{\alpha_u} \cdot \frac{s\sin\phi_k + \omega_k \cos\phi_k}{\omega_k} \overset{s \to j\omega_k}{=} \frac{\alpha_y}{\alpha_u}(j\sin\phi_k + \cos\phi_k) = \frac{\alpha_y}{\alpha_u} e^{j\phi_k} = |G(j\omega_k)| e^{j\phi_k}$$

instabiles System (stabilisierender Regelkreis notwendig!):

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{G_{cl}(s)}{C(s)(1 - G_{cl}(s))}}$$




PT2-Glied:

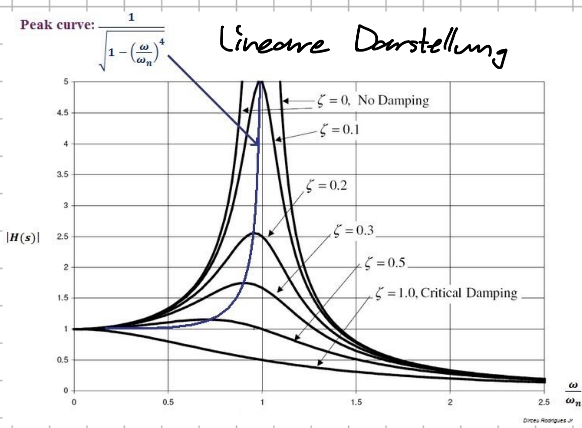
bei $\omega_0$ gilt $\phi(\omega)|_{\omega=\omega_0} = -90°$

Maximum liegt bei $\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$

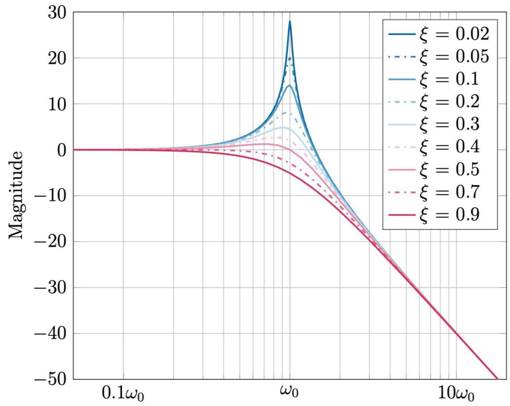
$\Delta H$ (nicht in dB) $= \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

für $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$ ist das Maximum bei $\omega = 0$ und $\Delta H = 1$ resp. $\Delta H_{dB} = 0$, für $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$ kein Peak

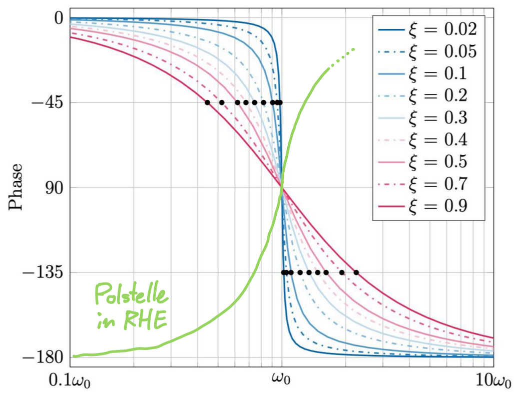
Lineare Darstellung




oftmals einfacher die Dämpfung im Phasengang abzulesen!




| $\xi$ | $\Delta$/dB |
|---|---|
| 0.02 | 28.0 |
| 0.05 | 20.0 |
| 0.1 | 14.0 |
| 0.2 | 8.1 |
| 0.3 | 4.8 |
| 0.4 | 2.7 |
| 0.5 | 1.2 |
| 0.7 | 0.0 |
| 0.9 | N/D |




| $\xi$ | $\omega/\omega_0$ | |
|---|---|---|
| | -45° | -135° |
| 0.02 | 0.98 | 1.02 |
| 0.05 | 0.95 | 1.05 |
| 0.1 | 0.91 | 1.11 |
| 0.2 | 0.82 | 1.22 |
| 0.3 | 0.74 | 1.34 |
| 0.4 | 0.68 | 1.48 |
| 0.5 | 0.62 | 1.62 |
| 0.7 | 0.52 | 1.92 |
| 0.9 | 0.45 | 2.25 |

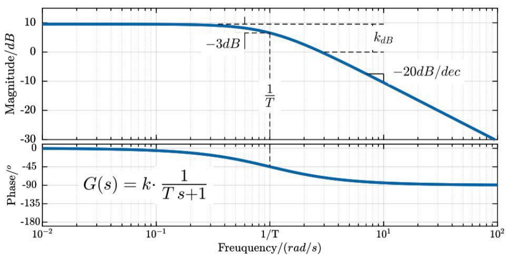
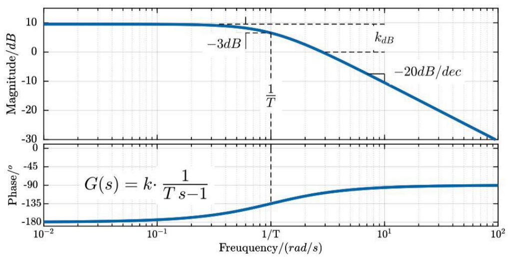
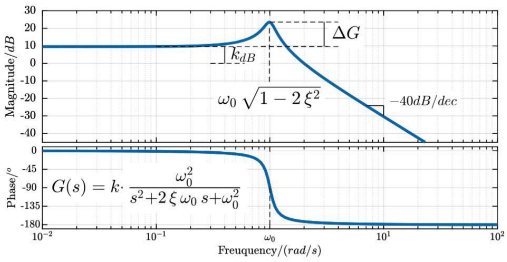
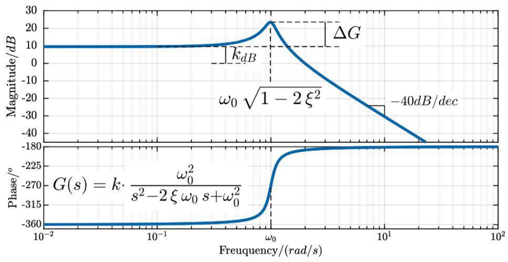
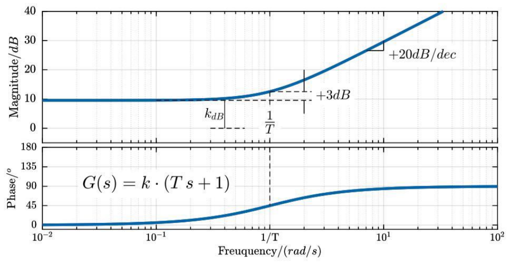
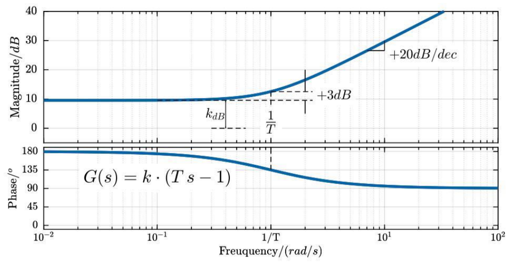
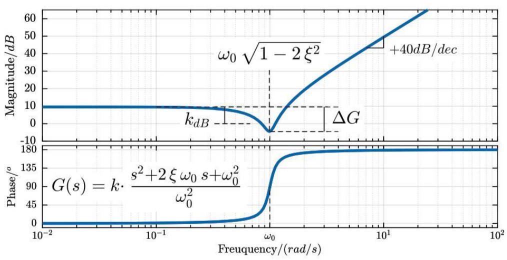
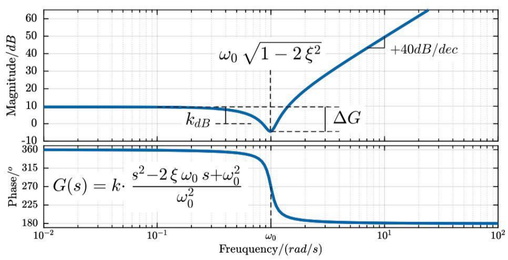
**Determination of the damping coefficient $\xi$**

Die in der Tabelle angegeben Werte für $\Delta G$ in dB, kann man direkt verwenden um $\xi$ abzuschätzen. Die Resonanzspitze ist bei $\omega = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$. Für Dämpfungsfaktoren $> \sqrt{2}/2$ existiert keine Resonanzspitze. Diese Werte entsprechen der Amplitudensenkung bei $\omega = \omega_0$.

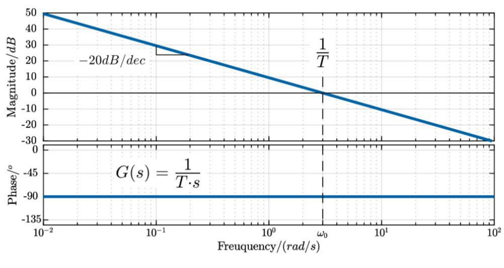
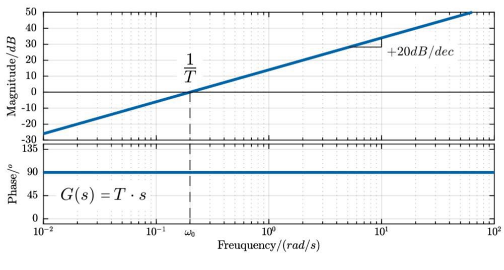
Alternativ, kann der Phasenabstand $\Delta\Omega$ (in % einer Dekade) verwendet werden. Dieser wird zwischen $\omega_0$ (entspricht einer Phasendrehung von $-90°$ für ein Tiefpass- und 90° für ein Hochpassglied) und dem $\omega$ gemessen, bei dem eine Phasendrehung von $-135°$ (respektive 135°) erreicht ist.

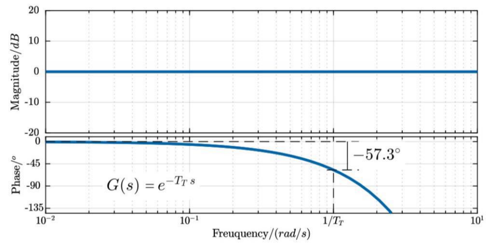
| $\xi$ | 0.02 | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta G$/dB | 28.0 | 20.0 | 14.0 | 8.1 | 4.8 | 2.7 | 1.2 | 0.0 | *-5.1* | *-6.0* |
| $\Delta\Omega$/% | 0.9 | 2.2 | 4.3 | 8.6 | 12.8 | 16.9 | 20.9 | 28.3 | 35.1 | 38.3 |

nächste Seite: Bodediagramme von elementaren Übertragungsfunktionen

| | Linke Halbebene | Rechte Halbebene |
|---|---|---|
| Reelle Pole |   |   |
| Komplex konjugiertes Polpaars |   |   |
| Reelle Nullstelle |   |   |
| Komplex konjugiertes Nullstellenpaar |   |   |

| $m$ | $m_{dB}$ |
|---|---|
| $1/10$ | -20 |
| $1/5$ | -14 |
| $1/4$ | -12 |
| $1/\pi$ | -10 |
| $1/2$ | -6 |
| $1/\sqrt{2}$ | -3 |
| $4/5$ | -2 |
| $9/10$ | -1 |
| 1 | 0 |
| $11/10$ | 0.8 |
| $6/5$ | 1.6 |
| $\sqrt{2}$ | 3 |
| 2 | 6 |
| $\pi$ | 10 |
| 4 | 12 |
| 5 | 14 |
| 10 | 20 |
| 20 | 26 |
| 50 | 34 |

| | Ursprung |
|---|---|
| Reeller Pol |   |
| Reelle Nullstelle |   |

| | Totzeit |
|---|---|
| Totzeit |   |

**Bestimmung von $T$**

Die 0 dB Durchtrittsfrequenz ist der einfachste Ansatz die Zeitkonstante $T$ des Integrators (respektive des Differenziators) zu bestimmen, e.g. $G(s) = T\,s \Rightarrow |G(\omega)| = |T\,j\omega| = T\,\omega$. Bestimmen sie $\omega_0$ an der Stelle für die $|G| \equiv 0$ dB ist (oder als absoluter Wert 1). Daraus ergibt sich $T\,\omega_0 \overset{!}{=} 1$. Generell kann irgendein Punkt af dem Amplitudengang verwendet werden um $T$ zu bestimmen, dann muss aber $|G|$ ebenfalls bestimmt und berücksichtigt werden.

**Bestimmung von $T_T$**

Die Phasendrehung der Totzeit in Abhängigkeit von $\omega$ ist $\phi = \omega\,T_T$. Unter der Annahme, dass bei $\omega_T$ die Phasendrehung genau $-1$ rad ist, resultiert $T_T = 1/\omega_T$. Eine Phasendrehung von $-1$ rad entspricht einer Phasendrehung von $-57.3°$.

# Systemidentifikation mit Least-Squares

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \vec{Y} = \underline{M}\vec{\theta} + \vec{\nu} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nu} = \vec{Y} - \underline{M}\vec{\theta}$$

Residuen/Fehler

$$\operatorname{argmin}_\theta \sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 = \operatorname{argmin}_\theta \vec{\nu}^T \vec{\nu} = (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \vec{Y} = \underline{M}^+ \vec{Y}$$

Pseudo-Inverse

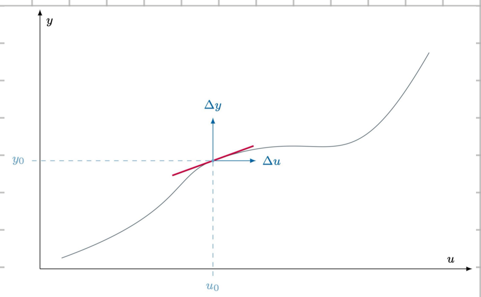
## Diskretisierung der DGL:

$$\boxed{\begin{aligned}
&G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_q s^q + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + \cdots + a_1 s + a_0} \\
\downarrow\ &G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_q z^q + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{b_q z^{q-n} + \cdots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}}{1 + \cdots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}} \\
\Updownarrow\ &Y(z)(1 + \cdots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}) = U(z)(b_q z^{q-n} + \cdots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}) \\
&y_k + a_{n-1} y_{k-1} + \cdots + a_1 y_{k-n+1} + a_0 y_{k-n} = b_q u_{k-n+q} + \cdots + b_1 u_{k-n+1} + b_0 u_{k-n} \\
\Updownarrow\ &y_k = b_q u_{k-n+q} + \cdots + b_1 u_{k-n+1} + b_0 u_{k-n} - a_{n-1} y_{k-1} - \cdots - a_1 y_{k-n+1} - a_0 y_{k-n}
\end{aligned}}$$

## Euler-Diskretisierung

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{s\,Y(s)\} = \frac{d}{dt} y(t) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{T_s}}$$

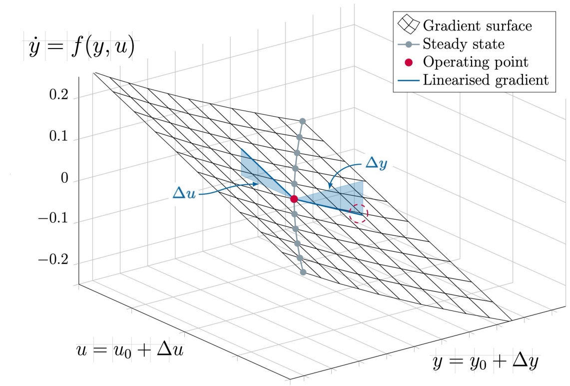
# Linearisierung von Systemen 1. Ordnung




## 1. Schritt: Arbeitspunkt bestimmen

Linearisierung erfolgt immer an einem stationären Arbeitspunkt → Ruhelage

$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad u_0, y_0$




## 2. Schritt: Δ-Grössen festlegen

$u = u_0 + \Delta u, \qquad y = y_0 + \Delta y$

## 3. Schritt: Gradienten bestimmen

$\alpha = \frac{\partial}{\partial y} f(y, u)\Big|_{u_0, y_0}, \qquad \beta = \frac{\partial}{\partial u} f(y, u)\Big|_{u_0, y_0}$

$\dot{y} = f(y_0 + \Delta y, u_0 + \Delta u) \approx f(y_0, u_0) + \alpha \Delta y + \beta \Delta u$

## 4. Schritt: Lineare DGL aufstellen

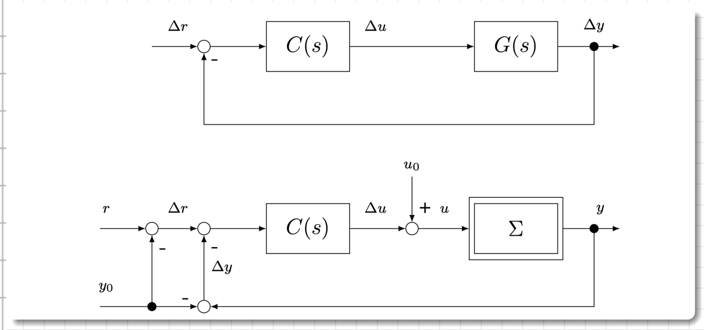
$\dot{y} = f(y, u) = \underbrace{f(y_0, u_0)}_{=0} + \alpha \Delta y + \beta \Delta u = \alpha \Delta y + \beta \Delta u$

$y := \Delta y, \quad u := \Delta u$

$sY = \alpha Y + \beta U \quad \Rightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{\beta}{s - \alpha}}$

$k_{DC} = \lim_{s \to 0} G(s) = -\beta / \alpha$

beim Betrieb des Reglers muss man den OP $(u_0, y_0)$ als Konstanten berücksichtigen!



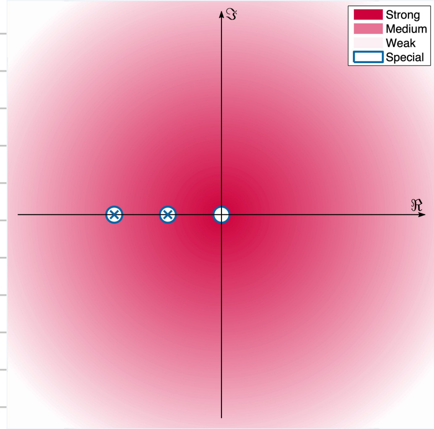

## Genauigkeit der Linearisierung testen:

$y(t) = y_0 + k_{DC} \cdot \Delta u$

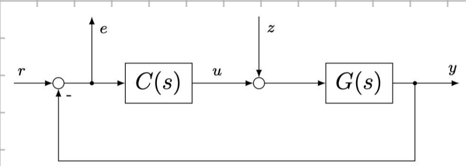
für einige $\Delta u$ berechnen und mit Messung vergleichen

# Einfluss der Nullstellen

Polstellen geben Einsicht in das makroskopische Systemverhalten, sind unabhängig von externen Faktoren / betrachteten Ein- und Ausgängen und stellen intrinsische Systemeigenschaften dar («eigen»)




Nullstellen sind wesentlich aus mikroskopischen Perspektive und hängen von betrachtetem Ein- und Ausgang ab! sie werden oft durch Regler eingeführt




$r \to y \quad TF = CG/(1+CG)$

$z \to y \quad TF = G/(1+CG)$

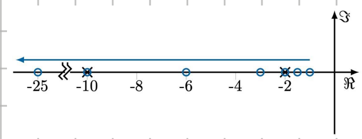
$r \to e \quad TF = 1/(1+CG)$

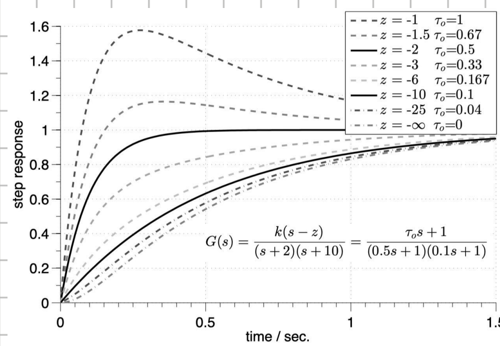
$z \to e \quad TF = -G/(1+CG)$

## Nullstellen in LHE

$$G(s) = \frac{k(s-z)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad \text{mit } k = \frac{p_1 p_2}{-z}$$

resp $k_{DC} = 1, \quad p_2 < p_1 < 0, \quad z < 0$




$$G(s) = \frac{-z^{-1}(s-z)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} = \frac{\tau_0 s + 1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

$$= \frac{\tau_0 s}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} + \frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \quad \text{mit } \tau_0 = -\frac{1}{z} > 0$$

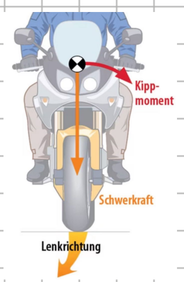
Antwort des Gesamtsystems ist also Überlagerung einer proportionalen und einer differenzierenden Komponente resp eine Sprungantwort (proportional) gewichtet mit ihrer Impulsantwort (differenzierend)

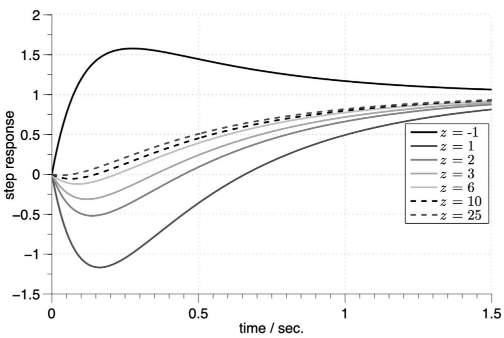
je näher z am Ursprung, desto dominierender ist der differenzierende Teil, falls z weit links liegt, dominiert der proportionale Teil

## Nullstellen in RHE

$$G(s) = \frac{k(s-z)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad \text{mit } k = \frac{p_1 p_2}{-z}$$

resp $k_{DC} = 1, \quad p_2 < p_1 < 0, \quad z > 0$



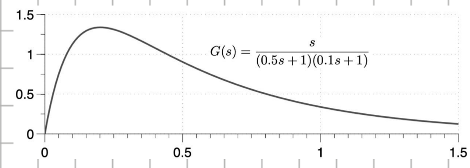

$$G(s) = \frac{-z^{-1}(s-z)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} = \frac{-\tau_0 s + 1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

$$= \frac{-\tau_0 s}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} + \frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \quad \text{mit } \tau_0 = \frac{1}{z} > 0$$

System mit Nullstelle in RHE zeigt eine ungewöhnliche Reaktion: es reagiert zuerst in die entgegengesetzte Richtung bevor es sich stabilisiert

Systeme mit Nullstellen in RHE sind nicht minimalphasig und schwierig zu regeln!

## Nullstelle im Ursprung

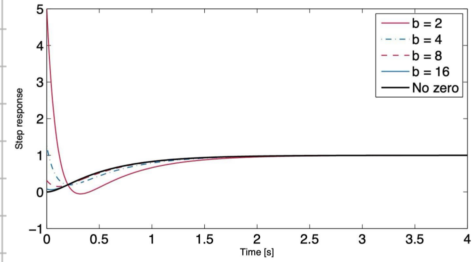



$$G(s) = \frac{k(s-z)}{(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{k/(p_1p_2)\cdot s}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} = \frac{\tau_0 s}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

mit $\tau_0 = k/(p_1p_2)$, $z=0$

System zeigt differenzierendes Verhalten, $k_{DC} = 0$

## komplex konjugiertes Nullstellenpaar auf imaginären Achse




$$G(s) = \frac{k(s^2+b^2)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad \text{mit } k = \frac{p_1p_2}{b^2} \text{ resp } k_{DC} = 1, \quad z_{1,2} = \pm jb$$

relative Ordnung $= 0 \Rightarrow$ direkter feed-through

je grösser b, desto schwächer wird der Effekt der Nullstellen und für $b \to \infty$ konvergiert Schrittantwort gegen diejenige des Systems ohne Nullstellen

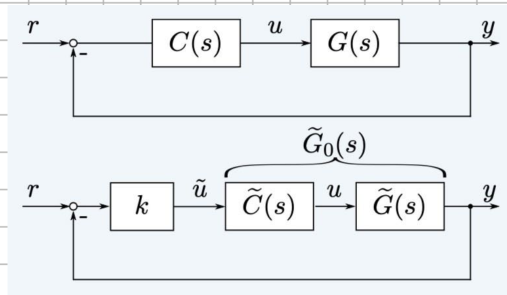
$$h(t)\big|_{t=0^+} = \lim_{t\downarrow 0} h(t) = \lim_{s\to\infty} s\frac{1}{s}G(s) = k = p_1p_2/b^2$$

$$\frac{d}{dt}h(t)\big|_{t=0^+} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{d}{dt}h(t) = \lim_{s\to\infty} s\,\mathcal{L}\{g(t)\} = \lim_{s\to\infty} s\,G(s) = \infty$$

## allgemeines Vorgehen

1. relative Ordnung bestimmen: $\rho = n - q$ = #Pole − #Nullstellen
2. proportional, differenzierend oder integrierend ?
3. dominantes Verhalten bestimmen: PT1, PT2 (reelle oder komplexe Pole) oder höher ?
4. Oszillationen, Überschiessen, non-minimalphasiges Verhalten beurteilen
   $\rightarrow$ #NS in RHE? #NS in LHE?

# Wurzelortskurve




Kurve der Lösungen in s-Ebene von

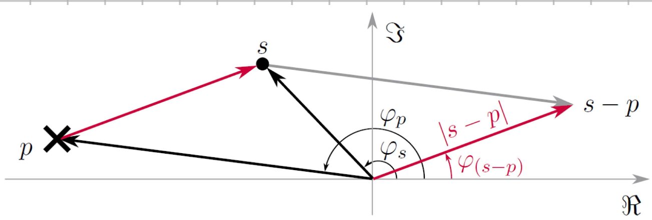
$$\boxed{1 + G(s)C(s) = 1 + k\tilde{C}(s)\tilde{G}(s) = 1 + k\tilde{G}_0(s) \overset{!}{=} 0}$$

wobei k variert wird zwischen $0 \dots \infty$

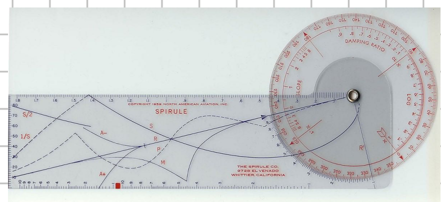
offene Kette in P-N-Form:

$$\boxed{k\,\tilde{G}_0(s) = k\frac{\prod_{i=1}^{q}|s-z_i|}{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}e^{j(\sum_{i=1}^{q}\varphi_{zi} - \sum_{i=1}^{n}\varphi_{pi})} \overset{!}{=} -1}$$

mit $\varphi_{zi} = \arg(s-z_i)$, $\varphi_{pi} = \arg(s-p_i)$




## Konstruktionsregeln für positive $k = 0 \dots \infty$




Betragsbedingung: $k = \frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{i=1}^{q}|s-z_i|}$

Phasenbedingung: $\sum_{i=1}^{q}\varphi_{zi} - \sum_{i=1}^{n}\varphi_{pi} = \pm\overbrace{(2l+1)\pi}^{\equiv 180°}, \; l \in \mathbb{N}_0$

a) $k=0 \Rightarrow$ Wurzelorte = Pole von $\tilde{G}_0(s)$

b) #Äste = #Pole von $\tilde{G}_0(s)$

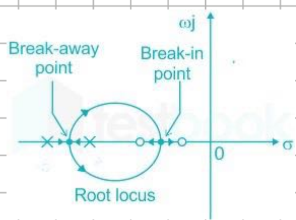
c) für $k \to \infty$ gehen
- q Pole in die Nullstellen von $\tilde{G}_0(s)$
- n-q Pole gegen $|\infty|$ in der komplexen Ebene (Asymptoten)

d) symmetrisch bez. reellen Achse

e) WOKs überdecken Abschnitte der reellen Achse, bei welchen eine ungerade Anzahl von Pol- und Nullstellen rechts davon auf der reellen Achse liegen

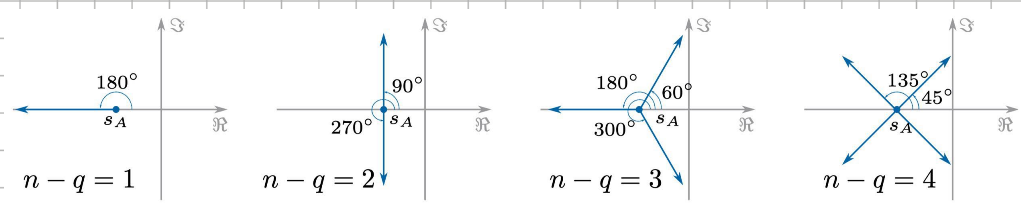
f) mehrfache Polstellen $s_B$ nennt man
- Break-away points: reell → komplex
- Break-in points: komplex → reell

→ erfüllen Phasenbedingung und $\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{s_B - z_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_B - p_i}$




g) Asymptoten:
- Schnittpunkt $s_A = (\sum_{i=1}^{n}p_i - \sum_{i=1}^{q}z_i)/(n-q)$
- Winkel $\varphi_A = (2l+1)\pi/(n-q)$ $\quad l \in \{0, 1, \dots, n-q-1\}$

| | $l=0$ | $l=1$ | $l=2$ | $l=3$ |
|---|---|---|---|---|
| $n-q=1$ | 180° | | | |
| $n-q=2$ | 90° | 270° | | |
| $n-q=3$ | 60° | 180° | 300° | |
| $n-q=4$ | 45° | 135° | 225° | 315° |



## Konstruktionsregeln für negative $k = 0 \ldots -\infty$

Betragsbedingung: $\boxed{|k|} = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s-p_i|}{\prod_{i=1}^{q} |s-z_i|}$

Phasenbedingung: $\sum_{i=1}^{q} \varphi_{zi} - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{pi} = \pm \boxed{2l\pi}, \quad l \in \mathbb{N}_0$

e') WOKs überdecken Abschnitte der reellen Achse, bei welchen eine **gerade** Anzahl von Pol- und Nullstellen rechts davon auf der reellen Achse liegen

g') Asymptoten Winkel $\varphi_A = \boxed{2l\pi/(n-q)} \quad l \in \{0, 1, \ldots, n-q-1\}$

## Designregeln Kompensatorentwurf

- mindestens so viele Polstellen wie Nullstellen (Kausalität)
- Pole weit links verschieben die Asymptoten nach links (i.e. in den stabileren Bereich)
- Nullen weit links verschieben die Asymptoten nach rechts (i.e. in den weniger stabilen Bereich)
- Niemals Pole oder Nullen in der RHE kompensieren!

## klassische Regler

**idealer PD**

$C(s) = k_p(T_d s + 1) = k_p T_d \left(s + \frac{1}{T_d}\right)$ → O bei $-1/T_d$

---

**PDT1 (realer PD)**

$C(s) = k_p\left(1 + \frac{T_d s}{T_f s + 1}\right) = k_p \frac{(T_f + T_d)s + 1}{T_f s + 1} = k_p \frac{T_f + T_d}{T_f} \frac{s + \frac{1}{T_f + T_d}}{s + \frac{1}{T_f}}$

$= \tilde{k}_p \frac{s + \frac{1}{T_f + T_d}}{s + \frac{1}{T_f}}$ mit $\tilde{k}_p = k_p \frac{T_f + T_d}{T_f}$ → O bei $-1/(T_f + T_d)$, X bei $-1/T_f$

äquivalent ↓

Vereinfachung: da $T_f \ll T_f + T_d$ gewählt wird ist $C(s) \approx \tilde{k}_p \frac{s + \frac{1}{T_d}}{s + \frac{1}{T_f}}$

---

**Lead**

$C(s) = k_p \frac{1 + Ts}{1 + \alpha T s} = \frac{k_p}{\alpha} \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$ mit $0 < \alpha < 1$ → gleiche Struktur wie PDT1

---

**PI**

$C(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = k_p \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s}$ → X im Ursprung, O bei $-1/T_i$

---

**Lag**

$C(s) = k_p \beta \frac{1 + Ts}{1 + \beta T s} = k_p \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$ mit $\beta > 1$ → X bei $-1/(\beta T)$, O bei $-1/T$

---

**PID**

$C(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = k_p T_d \frac{s^2 + \frac{1}{T_d}s + \frac{1}{T_i T_d}}{s}$ mit $z_{1,2} = -\frac{1}{2T_d} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{T_d^2} - \frac{4}{T_d T_i}}$

je nach $T_d$ und $T_i$ sind $z_{1,2}$ reell oder komplex → X im Ursprung, O bei $z_1$, O bei $z_2$

---

**PIDT1**

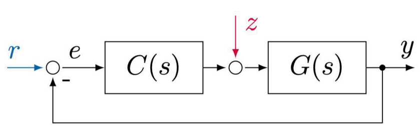
$C(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_f s + 1}\right) = k_p \frac{T_f + T_d}{T_f} \frac{s^2 + \frac{T_f + T_i}{T_i(T_f + T_d)}s + \frac{1}{T_i(T_f + T_d)}}{s\left(s + \frac{1}{T_f}\right)}$

falls $T_f \ll T_d$ und $T \ll T_i$ => $z_{1,2} \approx -\frac{1}{2T_d} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{T_d^2} - \frac{4}{T_d T_i}}$ → X im Ursprung, X bei $-1/T_f$, O bei $z_1$, O bei $z_2$

## Führungs- und Störverhalten

$G_{cl}(s) = \frac{CG}{1 + CG} = \frac{n_c n_g}{d_c d_g + n_c n_g}$

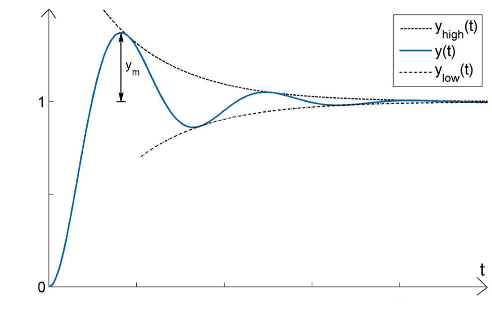
$G_z(s) = \frac{G}{1 + CG} = \frac{d_c n_g}{d_c d_g + n_c n_g}$




| | Ref.-response $r(t) = \sigma(t)$ and $z = 0$ | Dist.-response $z(t) = \sigma(t)$ and $r = 0$ |
|---|---|---|
| $e \neq 0$ | kein I-Anteil | kein I-Anteil |
| $e = 0$ | C oder G muss integrierend sein | C muss integrierend sein |

# Performance Kriterien

- Einschwingzeit $T_{set}$
- Überschiessen $y_m$




Überschiessen $y_m$:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\,G(s)\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\,\frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}\right\}$$

$$= 1 - e^{-\xi\omega_0 t}\left(\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\right) + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\right)\right)$$

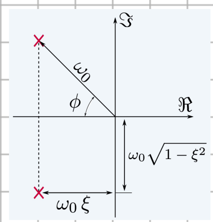
$$\dot{h}(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_0 t}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow t_{max} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0}$$

$$\Rightarrow y_m = h(t_{max}) - 1 = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

hängt nur von $\xi$ ab

Einschwingzeit $T_{set}$:




$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_0 t}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t + \overbrace{\arccos\xi}^{\phi}\right)$$

$$\Rightarrow y_{high}(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_0 t}, \quad y_{low}(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_0 t}$$

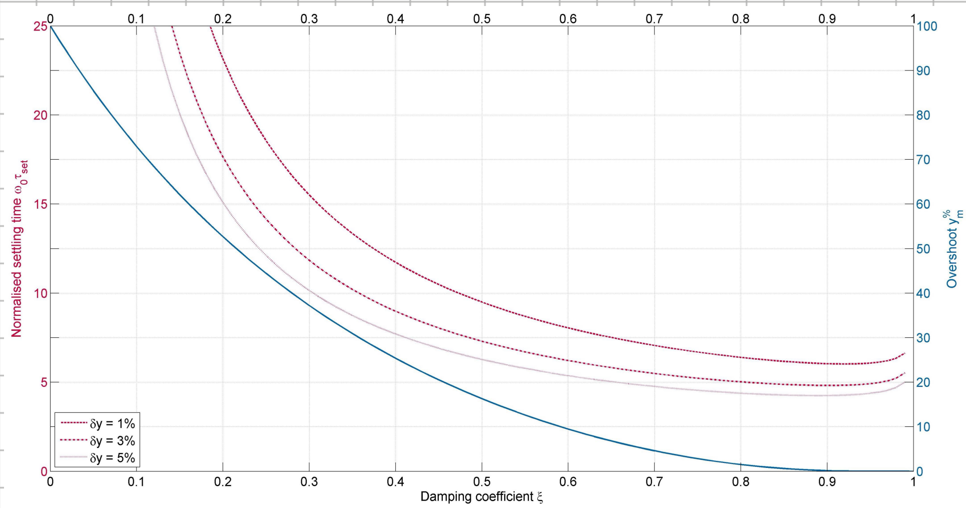
$$y_{high}(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_0 t} \overset{!}{\leq} 1+\delta y, \quad y_{low}(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_0 t} \overset{!}{\geq} 1-\delta y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_0 t} \overset{!}{\leq} \delta y$$

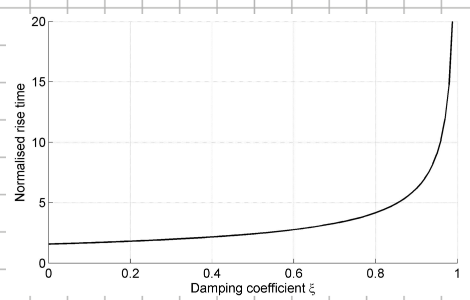
$$\Rightarrow \omega_0 T_{set} = -\frac{1}{\xi}\ln\left(\delta y\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

Vorgehen:

i) Vorgabe $y_m \rightarrow \xi$ bestimmen
ii) Vorgabe $\delta y \rightarrow \omega_0 T_{set}$ best.
iii) Vorgabe $T_{set} \rightarrow \omega_0$ best.
iv) mit $\omega_0$ & $\xi \rightarrow$ Pollage




$\xi$ nicht grösser als nötig wählen, da mit $\xi$ auch die Anstiegszeit $T_{rise}$, resp $\omega_0 T_{rise}$ (exponentiell) zunimmt:




$$h(t) = 1 - e^{-\xi\omega_0 t}\left(\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\right) + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\right)\right) \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\right) + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\right) \overset{!}{=} 0$$

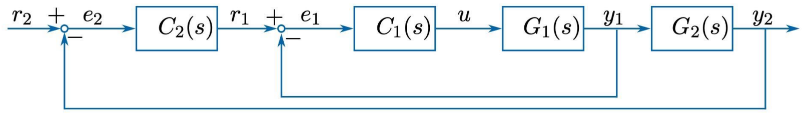
$$\Rightarrow \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t + \arccos\xi\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 T_{rise} = \frac{\pi - \arccos\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

# Klassische Regelung mit Erweiterungen

## Kaskadenregelung

$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$



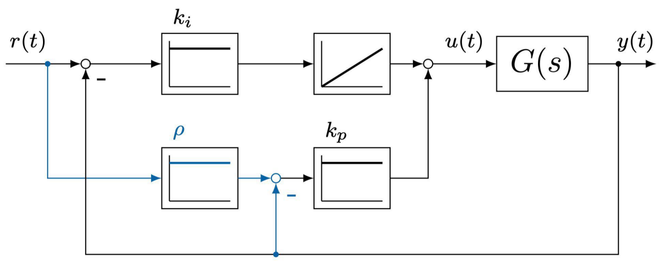

Gründe für Kaskadenregelung:
- innerer Kreis hat wesentlich kleinere Zeitkonstante als äusserer
- Nichtlinearitäten eines Aktuators
- schnelle Störabweisung durch inneren Kreis
- innerer Kreis stabilisiert ein instabiles System

$$\boxed{G_{cl1}(s) = \frac{C_1(s)\,G_1(s)}{1 + C_1(s)\,G_1(s)} \approx 1}$$

Zu beachten:
a) Reglerentwurf beginnt immer bei innerster Schleife bewegt sich Schritt für Schritt nach aussen
b) Systemdynamik nimmt von innen nach aussen ab
c) Dynamik einer inneren Schleife ist ausreichend schneller, dass dessen UTF als Einheitsverstärkung angenommen werden kann

Vor- und Nachteile:
+ i.A. dynamischere Antwort, da mehr Messungen verfügbar/verwendet
+ Linearisierung von nichtlinearen Subsystemen
+ innere Schleifen meist näher an Störungen
+ Sollwerte können leicht begrenzt werden
- höherer Aufwand/Kosten durch zusätzliche Messungen

## 2-DoF-Regelung



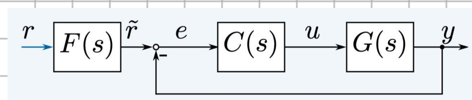

### Entkopplung des Regelfehlers

i) Regler auf Störverhalten auslegen

ii) $\rho$ für Anpassung der Sprungantwort verwenden

$\Rightarrow$ $\rho$ beeinflusst Störübertragungsfunktionen nicht

### Nullstellenkompensation




Regler $C(s) = n_c / d_c$ führt oft dominante Nullstellen in $G_{cl}$ ein welche beim Führungsverhalten zu Überschiessen führen:

$$\boxed{G_{cl}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{n_c n_g}{d_c d_g + n_c n_g}}$$

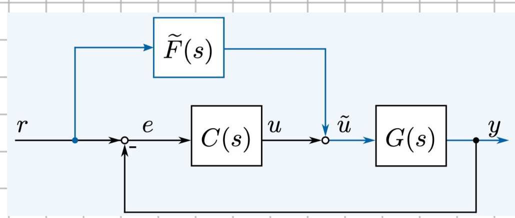
$C(s)$ führt auch in $G_z$ Nullstellen ein (Pole von $C$), jedoch sind diese meist nicht dominant, da weit links gesetzt werden:

$$\boxed{G_z(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{d_c n_g}{d_c d_g + n_c n_g}}$$

mit Vorfilter $F$ kann man Nullstellen in $G_{cl}$ kompensieren:

$$\boxed{\tilde{G}_{cl}(s) = F(s)\,G_{cl}(s) = \frac{c}{n_c n_g}\,G_{cl}(s) = \frac{c}{d_c d_g + n_c n_g} \quad \text{wobei } c \text{ so gewählt, dass } F(s) \text{ einen } DC = 1 \text{ hat}}$$

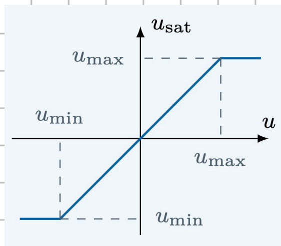
### Feedforward Regelung




$$u_{des}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{G(s)}\,\mathcal{L}\{y_{des}(t)\}\right\}$$

$\Rightarrow \tilde{F}(s) = \frac{1}{G(s)}$ i.A. nicht kausal, da $G(s)$ kausal
$\rightarrow$ braucht noch TP geeigneter Ordnung

# Anti Reset Wind-up



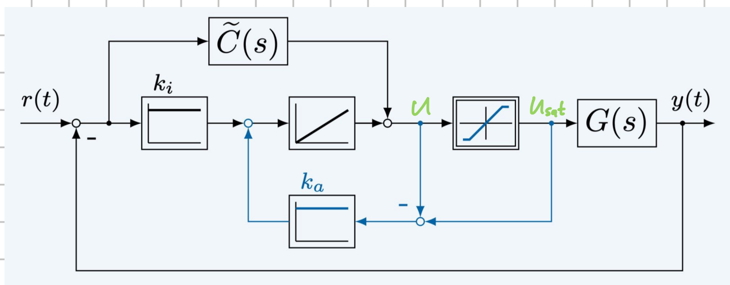

$u(t)$ kann nicht beliebig gross werden (jeder Aktuator hat eine physikalische Grenze)
→ muss begrenzt werden:

$$u_{sat} = \begin{cases} u_{max} & \text{für } u > u_{max} \\ u & \text{für } u_{min} \leq u \leq u_{max} \\ u_{min} & \text{für } u < u_{min} \end{cases}$$

Problem: macht System nichtlinear, evt. instabil
→ bei richtigem Umgang kann lineare Systemtheorie trotzdem angewendet werden

einfache Methode: Integrator clamping (nicht empfohlen)

bessere Methode: Back calculation




i) Regler normal auslegen:

$$C(s) = k \frac{s^q + \beta_{q-1} s^{q-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s(s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0)}$$

ii) I-Anteil abspalten (sodass parallel):

$$C(s) \overset{!}{=} \frac{k_i}{s} + \tilde{C}(s)$$

mit Ansatz $\tilde{C}(s) = \dfrac{b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$

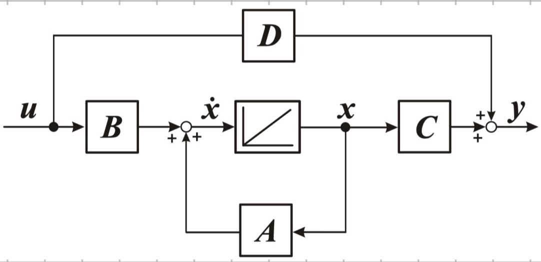
iii) zusätzlich Rückführung einfügen:

solange im linearen Bereich, ist Differenz 0 (kein Einfluss)

sobald maximal zulässigen Wert überschritten (also $u > u_{max}$)

⇒ $k_a(u - u_{sat})$ wird zurückgeführt und vor $\boxed{\frac{1}{s}}$-Block subtrahiert

# Zustandsraumdarstellung

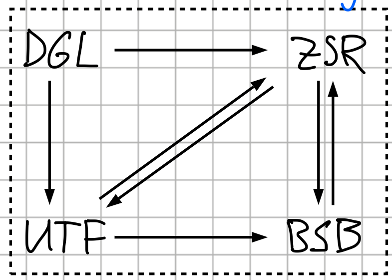



$$\dot{\vec{x}} = \underline{A}\,\vec{x} + \underline{B}\,\vec{u} \qquad \text{Zustandsgleichung}$$
$$\vec{y} = \underline{C}\,\vec{x} + \underline{D}\,\vec{u} \qquad \text{Ausgangsgleichung}$$

Dimensionen:

| | | |
|---|---|---|
| $\underline{A}$ | $n \times n$ | n: # Zustände ≡ Ordnung der DGL |
| $\underline{B}$ | $n \times m$ | m: # Eingänge |
| $\underline{C}$ | $r \times n$ | r: # Ausgänge |
| $\underline{D}$ | $r \times m$ | |

## Übersicht Umwandlungen




Bedeutung der einzelnen Matrizen:

- $\underline{A}$ (Systemmatrix): beschreibt Dynamik des Systems
- $\underline{B}$ (Eingangsmatrix): Wirkung Eingangsgrössen auf Zustände
- $\underline{C}$ (Ausgangsmatrix): Erzeugung Ausgangsgrössen aus Zuständen
- $\underline{D}$ (Durchgangsmatrix): beschreibt wie Eingänge direkt auf Ausgangsgrössen wirken → nur für sprungfähige Systeme ≠ 0

## ZSR-Darstellung einer lin. DGL $n^{\text{ter}}$ Ordnung

(normierte) DGL $n^{\text{ter}}$ Ordnung der Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_q u^{(q)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

Kausalität: $q \le n$

in System von n DGLn $1^{\text{ter}}$ Ordnung transformieren:

Regelungsnormalform

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{C} = (b_0 - b_n a_0, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}), \qquad \underline{D} = b_n \qquad \text{falls } q = n$$

→ sprungfähig

$$\underline{C} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}), \qquad \underline{D} = 0 \qquad \text{falls } q < n$$

## UTF aus ZSR-Darstellungen

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}\,\vec{x}(t) + \underline{B}\,u(t)$$
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$
$$s\vec{X}(s) = \underline{A}\vec{X}(s) + \underline{B}U$$
$$s\vec{X}(s) - \underline{A}\vec{X}(s) = \underline{B}U(s)$$
$$(s\underline{I} - \underline{A})\vec{X}(s) = \underline{B}U(s)$$
$$\vec{X}(s) = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B}U(s)$$

$$y = \underline{C}\,\vec{x} + \underline{D}u$$
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$
$$Y = \underline{C}\vec{X} + \underline{D}U$$
$$= \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B}U + \underline{D}U$$
$$= (\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D})U$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D} = \underline{C}\,\frac{\operatorname{adj}(s\underline{I} - \underline{A})}{|s\underline{I} - \underline{A}|}\,\underline{B} + \underline{D}$$

wobei $(\operatorname{adj}(\underline{M}))_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\underline{M}_{ji})$ wobei $\underline{M}_{ij} = \underline{M}$ mit gestrichener Zeile i & Spalte j

falls m und/oder r > 1 erhält man für jede Eingang/Ausgang-Kombination eine UTF

## ZSR-Darstellung aus BSB

Zustände hinter Integratoren platzieren

### Bewegungsgleichung aus Zustandsraummodell

$$\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x} + \underline{B}u \Rightarrow \vec{x}(t) = e^{\underline{A}t}\vec{x}_0 + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}u(\tau)\,d\tau$$

$$\vec{y} = \underline{C}\vec{x} + \underline{D}u \Rightarrow \vec{y}(t) = \underbrace{\underline{C}e^{\underline{A}t}\vec{x}_0}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_0^t \underline{C}e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}u(\tau)\,d\tau + \underline{D}u(t)}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

### Gewichtsfunktion

Systemantwort auf Dirac-Impuls:

$$g(t) = \int_0^t \underline{C}e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\delta(\tau)\,d\tau + \underline{D}u(t) = \underline{C}e^{\underline{A}t}\underline{B} + \underline{D}\delta(t)$$

### Pol- und Nullstellen eines LTI-Systems

falls Eingang $= 0 \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}\vec{x}(t) \rightarrow$ Ansatz: $\vec{x} = \vec{\tilde{x}}e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \lambda\vec{\tilde{x}}e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \lambda\vec{\tilde{x}}e^{\lambda t} = \underline{A}\vec{\tilde{x}}e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda\vec{\tilde{x}} = \underline{A}\vec{\tilde{x}}$ Eigenwertgleichung (charakteristische Gleichung)

Vergleich mit UTF liefert uns folgende Erkenntnis:

Polstellen gegeben durch Eigenwerte der Systemmatrix $\underline{A}$

→ charakterisieren dynamisches System unabhängig von Systemeingang (Matrix $\underline{B}$) und Messgrössen (Matrix $\underline{C}$)

Eigenvektoren beschreiben typische Bewegungen des dynamischen Systems, die sich auf Zeitskalen abspielen welche durch die Eigenwerte gegeben sind

→ Eigenwerte haben Einheit $1/s$

Eigenwerte und -vektoren einer reellen Matrix treten entweder reell oder in komplex konj. Paaren auf

da Grössen in der Natur reellwertig sind, sind wir an reellwertigen Vorgängen interessiert, welche sich durch Superposition aus den kompl. konj. EV/EW erzeugen lassen:

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\left(\vec{x}_c e^{\lambda_c t} + \vec{x}_c^* e^{\lambda_c^* t}\right)$$

Nullstellen sind Lösungen einer verallgemeinerten Eigenwertgleichung $0 = \det\begin{pmatrix} \underline{A} - z_i\underline{I} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix}$

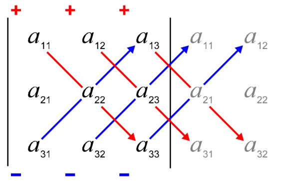
→ schneller ist es die Nullstellen aus Zählerpolynom der UTF zu berechnen

## Steuerbarkeit

salopp: nicht steuerbar, wenn es Komponenten in $\vec{x}$ gibt, die durch $\vec{u}$ nicht geeignet zu beeinflussen sind

genau: Syst. $\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x} + \underline{B}\vec{u}$ ist vollständig steuerbar, falls für jeden Anfangszustand $\vec{x}(t_0)$ eine Eingangsfunktion $\vec{u}(t)$ existiert, die das System in endlicher Zeit in beliebigen Endzustand $\vec{x}(t_{end})$ überführt

Steuerbarkeitsmatrix $\boxed{\underline{Q}_S := (\underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \underline{A}^2\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{B}) \quad n \times n \cdot m \text{ Matrix}}$




hat $Q_S$ Rang $n$ ($n$ lin. unabh. Zeilen), ist System vollst. steuerbar

im Falle $m=1 \rightarrow \det(\underline{Q}_S) \neq 0$

anstatt $(\underline{A} \cdots \underline{A})\underline{B} \xrightarrow{\text{schneller}} \underline{A}(\cdots(\underline{A}(\underline{A}\underline{B}))\cdots)$

für komplizierte Ausdrücke in den Komponenten von $\underline{A}$ neue Variablen einführen und am Schluss erst wieder ersetzen!

**Laplacescher Entwicklungssatz**

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$, wenn du nach der i-ten Zeile entwickelst oder

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$, wenn du nach der j-ten Spalte entwickelst.

## Beobachtbarkeit

salopp: nicht beobachtbar, wenn man von $\vec{y}$ n. geeignet auf Komponenten von $\vec{x}$ schliessen kann

genau: Syst. $\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x} + \underline{B}\vec{u}$, $\vec{y} = \underline{C}\vec{x}$ ist vollständig beobachtbar, wenn Anfangszustand $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ aus den im Intervall $t_0 \leq t \leq t_{end}$ bekannten Grössen $\vec{y}(t)$ und $\vec{u}(t)$ bestimmt werden kann

Beobachtbarkeitsmatrix $\boxed{\underline{Q}_B := \begin{pmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C}\underline{A}^{n-1} \end{pmatrix} \quad n \cdot r \times n \text{ Matrix}}$

hat $Q_B$ Rang $n$ ($n$ lin. unabh. Zeilen), ist System vollst. beobachtb.

im Falle $r=1 \rightarrow \det(\underline{Q}_B) \neq 0$

## Ähnlichkeitstransformationen

für gegebenes System nicht eindeutig festgelegt wie Zustandsvariablen $\vec{x}$ gewählt werden und somit sind auch $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ nicht eindeutig

Zustandsraummodell lässt sich mit Ähnlichkeitstransformationen in neue Form bringen, indem man den Zustandsvektor $\vec{x}$ mit einer regulären ($\Rightarrow$ invertierbaren) $n \times n$-Matrix $\underline{T}$ multipliziert:

$$\vec{\tilde{x}} = \underline{T}\vec{x} \quad \text{resp.} \quad \vec{x} = \underline{T}^{-1}\vec{\tilde{x}}$$

$$\Rightarrow \underline{T}^{-1}\dot{\vec{\tilde{x}}} = \underline{A}\underline{T}^{-1}\vec{\tilde{x}} + \underline{B}\vec{u} \quad \Rightarrow \underline{E}\,\dot{\vec{\tilde{x}}} = \underline{T}\underline{A}\underline{T}^{-1}\vec{\tilde{x}} + \underline{T}\underline{B}\vec{u} \quad \text{resp.} \quad \dot{\vec{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{A}}\vec{\tilde{x}} + \underline{\tilde{B}}\vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{y} = \underline{C}\vec{x} + \underline{D}\vec{u} = \underline{C}\underline{T}^{-1}\vec{\tilde{x}} + \underline{D}\vec{u} = \underline{\tilde{C}}\vec{\tilde{x}} + \underline{D}\vec{u}$$

neue Matrizen: $\boxed{\underline{\tilde{A}} = \underline{T}\underline{A}\underline{T}^{-1}, \ \underline{\tilde{B}} = \underline{T}\underline{B}, \ \underline{\tilde{C}} = \underline{C}\underline{T}^{-1}}$

$\boxed{\vec{\tilde{x}}(t_0) = \underline{T}\,\vec{x}(t_0)}$

Komponenten von $\vec{\tilde{x}}$ entsprechen meist n. mehr anschaulichen Grössen (Geschw., Spannung, ...) sondern Linearkombinationen dieser

bei Lösung der DGL muss auch der Anfangszustand entsprechend $\vec{\tilde{x}}(t_0) = \underline{T}\vec{x}(t_0)$ transformiert werden

# Normalformen

## Kanonische Normalform

wenn die Eigenvektoren $\vec{v}_i$ lin. unabhängig sind, kann man $\underline{A}$ diagonalisieren mit $\underline{T} = \underline{V}^{-1}$:

$$\boxed{\tilde{\underline{A}} = \underline{V}^{-1}\underline{A}\,\underline{V} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad \text{wobei } \underline{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n), \quad \vec{\tilde{x}} = \underline{V}^{-1}\vec{x}}$$

$\vec{v}_i$ ist Lösung von $(\lambda_i \underline{I} - \underline{A})\vec{v}_i = \vec{0}$ Eigenvektoren

die n DGL sind entkoppelt, d.h., die Dynamik der Koordinaten sind untereinander unabhängig:

$$\dot{\tilde{x}}_i(t) = \lambda_i\,\tilde{x}_i(t) + b_i u(t)$$

## Regelungsnormalform

im Falle einer Ein- und Ausgangsgrösse haben $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ in dieser Form die Gestalt:

$$\underline{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}, \quad \underline{B}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{C}_R = (* \cdots *)$$

die RNF einer DGL der Form $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_q u^{(q)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 u$ s.o.

ein Vorteil ist dass man char. Polynom direkt aus $\underline{A}_R$ ablesen kann:

$$P_{\underline{A}_R}(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Berechnung aus beliebig gestalteten $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$:

$\underline{Q}_S = (\underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{B})$ berechnen,

$\vec{q}_S^{\,T} = (0 - 0\ 1)\,\underline{Q}_S^{-1}$ (letzte Zeile der Inversen von $\underline{Q}_S$)

$$\boxed{\underline{T}_R = \begin{pmatrix} \vec{q}_S^{\,T} \\ \vec{q}_S^{\,T}\underline{A} \\ \vdots \\ \vec{q}_S^{\,T}\underline{A}^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \underline{A}_R &= \underline{T}_R\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1} \\ \underline{B}_R &= \underline{T}_R\,\underline{B} \\ \underline{C}_R &= \underline{C}\,\underline{T}_R^{-1} \end{aligned} \qquad \vec{x}_R(t_0) = \underline{T}_R\,\vec{x}(t_0)}$$

## Beobachtungsnormalform

im Falle einer Ein- und Ausgangsgrösse haben $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ in dieser Form die Gestalt:

$$\underline{A}_B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{B}_B = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{C}_B = (0 - 0\ 1), \quad \underline{D}_B = b_n$$

Berechnung:

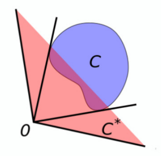
$$\underline{Q}_B = \begin{pmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C}\,\underline{A}^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \vec{q}_B = \underline{Q}_B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (letzte Spalte der Inversen von $\underline{Q}_B$)

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{T}_B = (\vec{q}_B, \underline{A}\vec{q}_B, \dots, \underline{A}^{n-1}\vec{q}_B)^{-1} \quad \text{Inverse!} \\ &\underline{A}_B = \underline{T}_B\,\underline{A}\,\underline{T}_B^{-1}, \quad \underline{B}_B = \underline{T}_B\,\underline{B}, \quad \underline{C}_B = \underline{C}\,\underline{T}_B^{-1}, \quad \vec{x}_B(t_0) = \underline{T}_B\,\vec{x}(t_0) \end{aligned}}$$

# Dualität

wenn System steuerbar und beobachtbar ist, gilt

$\boxed{\underline{A}_R = \underline{A}_B^T, \quad \underline{B}_R = \underline{C}_B^T, \quad \underline{C}_R = \underline{B}_B^T \quad \text{Dualität zwischen Steuerbarkeit \& Beobachtbarkeit}}$



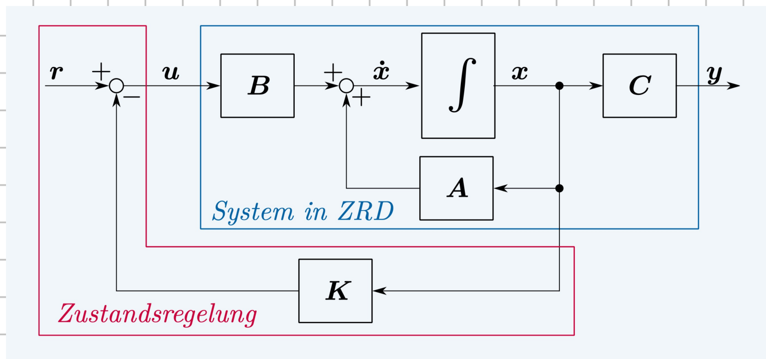
A set $C$ (blue) and its dual cone $C^*$ (red).

$\underline{A}_R$ und $\underline{A}_B$ haben Form einer Frobenius (Begleit-)Matrix

charakteristisch ist, dass Koeffizienten des charakt. Polynoms als negative Elemente entweder in letzter Zeile oder Spalte vorkommen, eine Nebendiagonale mit 1 besetzt, alle anderen Elemente sind 0

da die beiden Matrizen das gleiche char. Polynom besitzen, sind $\underline{A}_R$ und $\underline{A}_B$ zueinander ähnlich

# Zustandsregelung




da $\underline{D}$ meist $= 0$ ist, weggelassen
→ alle Überlegungen können dann auch für $\underline{D} \neq 0$ erweitert werden

$\underline{K}$ ist $m \times n$ - Matrix

kein direkter Vergleich zwischen Soll- und Istwerten

Dynamik des geschlossenen Systems:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \underline{A}\,\vec{x}(t) + \underline{B}\,\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) &= \underline{C}\,\vec{x}(t) \\ \vec{u}(t) &= \vec{r}(t) - \underline{K}\,\vec{x}(t) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\,\vec{x}(t) + \underline{B}\,\vec{r}(t) \\ \vec{y}(t) &= \underline{C}\,\vec{x}(t) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\underline{A}_{cl} = \underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}}$$ gibt auch Konvention mit $\underline{A} + \underline{B}\,\underline{K}$

$$\boxed{G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A}_{cl})^{-1}\underline{B} = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\,\underline{K})^{-1}\underline{B}}$$

## Polvorgabe

Überprüfen:
- System $\underline{A}$, $\underline{B}$ muss steuerbar sein
- falls nicht vollst. steuerbar, können nur die steuerbaren Pole d. Strecke verschoben werden

damit Pole vorgegeben werden können, braucht es die charakteristische Gleichung

Variante I: aus ÜTF

$$\boxed{\text{Determinante } \; |s\underline{I} - \underline{A}_{cl}| \overset{!}{=} 0 \; \text{ resp } \; |s\underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\,\underline{K}| \overset{!}{=} 0}$$

Variante II: aus Regelungsnormalform

kann direkt abgelesen werden aus $\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0-k_1 & -a_1-k_2 & \cdots & -a_{n-1}-k_n \end{pmatrix}$

$P(s) = s^n + (a_{n-1}+k_n)s^{n-1} + \dots + (a_1+k_2)s + (a_0+k_1)$

$n$ Koeffizienten von $\underline{K}$ treten unabhängig in allen Koeffizienten von $P(s)$ auf
→ alle Eigenwerte des rückgeführten Systems können vorgegeben werden!

Bestimmung von $\underline{K}$ durch Koeffizientenvergleich

falls man alle an gleiche Stelle $\Omega$ legen möchte:

$$\boxed{(s+\Omega)^n \overset{!}{=} 0}$$

Nachteil: kann physikalisch wenig Sinn machen

man kann im Polbild jede einzelne Pollage vorgeben:

$$\boxed{P(s) = (s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

in Regelungsnormalform besonders einfach:

$$\boxed{k_1 = \alpha_0 - a_0, \quad k_2 = \alpha_1 - a_1, \quad \text{usw.}}$$

daher Name: Darstellung welche für Berechnung eines Zustandsreglers geeignet ist

## Ablauf Reglerentwurf

1. mathem. Modell der Regelstrecke in Zustandsraumformulierung entwerfen
2. Steuerbarkeit des Systems überprüfen
3. charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises entweder aus UTF oder RNF berechnen
4. Koeffizienten von $\underline{k}$ durch Koeffizientenvergleich bestimmen

## Wahl der Pole der Regelstrecke

wenn zu regelndes System steuerbar & alle vorhandenen Zustände gemessen → alle Pole können vorgegeben werden

→ theoretisch beliebig hohe Dynamik mit hoher Dämpfung möglich

dabei gibt es aber einige Probleme:

- je dynamischer ($\hat{=}$ je weiter links) Pole gewählt werden desto höher werden Stellamplituden
  → diese sind jedoch physikalisch oft begrenzt (Ströme, Leistungen, etc.)
- Fehler bei Modellierung d. math. Modells können sich bei hohen Verstärkungen negativ auswirken
- Messfehler und -unsicherheiten werden bei hoher Dynamik ebenfalls mit negativen Folgen verstärkt

## Befehl zur Berechnung

K=place(A,B,v)  # berechnet K so, dass $(\underline{A}-\underline{B}\underline{K})$ die Polstellen $\vec{v}$ hat

## Vermeidung des statischen Regelfehlers

statische Verstärkung $k_{DC}$ auf sprungförmige Eingangsgröße: $k_{DC} = \frac{y(t\to\infty)}{r(t\to\infty)} = \frac{\lim_{s\to 0} sY(s)}{1} = \lim_{s\to 0} G_d(s)$

→ Zustandsregler in jetziger Form hat Regelfehler

<u>Vorfilter (einfache Methode):</u>

$$\lim_{s\to 0} \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\underline{K})^{-1}\underline{B}\,\vec{k}_F \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{k}_F = \frac{-1}{\underline{C}(\underline{A}-\underline{B}\underline{K})^{-1}\underline{B}} = \frac{1}{\underline{C}(\underline{B}\underline{K}-\underline{A})^{-1}\underline{B}}}$$

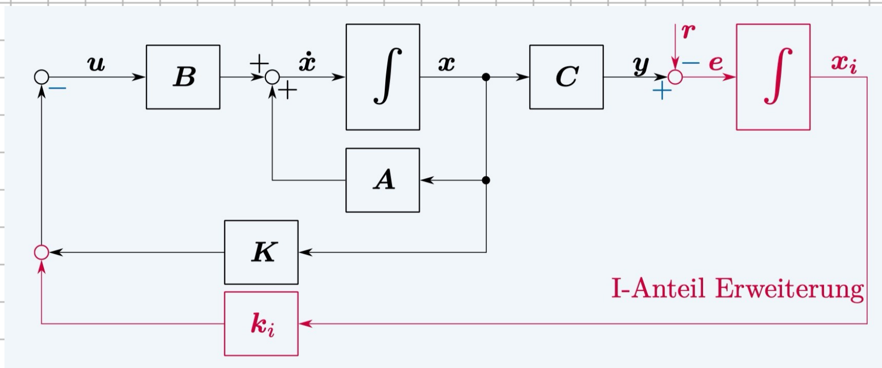
in RNF ergibt sich $k_F = \frac{a_0 + k_1}{b_0}$

da Systemmodell normalerweise nicht ganz genau wird trotzdem Regelfehler auftreten

# I-Anteil:

um Regelfehler = 0 zu garantieren, kann wie in klassischer Regelung der Regler mit I-Anteil ergänzt werden.
-> Zustandsraumerweiterung / «augmented states»

Vorzeichenwechsel bei Vergleich Soll-Ist-wert, damit I-Wert negativ auf u wirkt




Stellgrösse: $\vec{u} = -\underline{K}\vec{x} - \underline{k_i}\vec{x}_i$

Zustandsvektor: $\vec{\xi} = \begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{x}_i\end{pmatrix}$

Rückführmatrix: $\underline{\mathcal{K}} = (\underline{K}\ \vec{k}_i)$

neue Zustandsraumdarstellung:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\vec{\xi}}(t) &= \underline{\mathcal{A}}\,\vec{\xi}(t) + \underline{\mathcal{B}}\,\vec{u}(t) + \underline{\mathcal{E}}\,\vec{r}(t)\\ \vec{y}(t) &= \underline{\mathcal{C}}\,\vec{\xi}(t), \quad \vec{u}(t) = -\underline{\mathcal{K}}\,\vec{\xi}(t)\end{aligned}}$$

mit $\underline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}A & 0\\ C & 0\end{pmatrix}$ $\underline{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}$ $\underline{\mathcal{C}} = (\underline{C}\ \underline{0})$ $\underline{\mathcal{K}} = (\underline{K}\ \underline{k_i})$ $\underline{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}0\\ -\underline{I}\end{pmatrix}$

aus dieser ZDR kann man wiederum die UTF des geschl. Sys. berechnen:

$$G_{cl}(s) = \underline{\mathcal{C}}(s\underline{I} - \underline{\mathcal{A}} + \underline{\mathcal{B}}\,\underline{\mathcal{K}})^{-1}\underline{\mathcal{E}}$$

also ist ch. Gleichung:

$$|s\underline{I} - \underline{\mathcal{A}} + \underline{\mathcal{B}}\,\underline{\mathcal{K}}| \overset{!}{=} 0$$

Vorzeichenwechsel hat also für Eigenverhalten des Systems keinen Einfluss, da dieser nur bei neuer Eingangsmatrix $\underline{\mathcal{E}}$ berücksichtigt wird

man kann direkt Rückführmatrix $\underline{\mathcal{K}}$ durch Polvorgabe bestimmen:

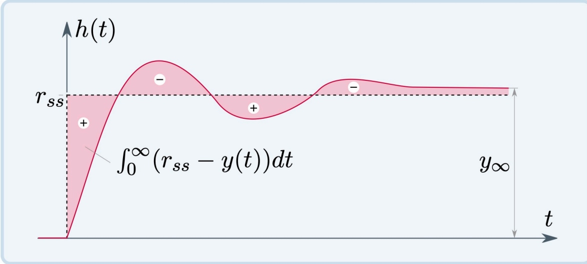
$$\boxed{(s+\Omega)^{n+n_i} \overset{!}{=} 0}$$

Ordnung des Systems erhöht sich um Anzahl erweiterten Zustände $n_i$ ($\hat{=}$ # Sollwerte)

# Reglerentwurf mit Gütekriterium

## Integralkriterien:

lineare Regelfläche: $J_{lin} = \int_0^\infty (y_\infty - y(t))\,dt$




→ nicht so gut, da Dauerschwingungen nach diesem Kriterium auch gut sein kann

Betragsfläche: $J_{abs} = \int_0^\infty |y_\infty - y(t)|\,dt$

quadr. Regelfläche: $J_{sqr} = \int_0^\infty (y_\infty - y(t))^2\,dt$

## LQR Verfahren:

Grundgedanke: Regelfläche sollte möglichst klein sein und zudem sollte auch Stellgrösse nicht zu gross werden, mathematisch als Gütefunktional:

$$J = \int_0^\infty \left(q(r(t) - y(t))^2 + r\,u(t)^2\right)dt$$

mit Parametern $q$ und $r$ um den Regelfehler gegenüber Stellaufwand stärker oder schwächer zu gewichten

Annahme: $r = 0$ (kann man stets durch Koordinatentrafo erzeugen)

Gemäss ZRD ist $y = Cx$, daraus ergibt sich

$$J = \int_0^\infty \left(q(Cx(t))^2 + r\,u(t)^2\right)dt$$ für SISO-Systeme

respektive

$$J = \int_0^\infty \left(\vec{x}(t)^T \underline{Q}\,\vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T \underline{R}\,\vec{u}(t)\right)dt$$ für MIMO-Systeme

mit Wichtungsmatrizen $\underline{Q}$ und $\underline{R}$

$\underline{Q}$ und $\underline{R}$ sind positiv definit, wobei bei $\underline{Q}$ das $C$ mit verrechnet ist

wie sich Zustände $\vec{x}(t)$ verhalten werden hängt wiederum von $\vec{u}(t)$ ab, das heisst man optimiert

$$\boxed{\min_{u(t)} \int_0^\infty \left(\vec{x}(t)^T \underline{Q}\,\vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T \underline{R}\,\vec{u}(t)\right)dt \quad \text{subject to} \quad \dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}\,\vec{x}(t) + \underline{B}\,\vec{x}(t)}$$

man kann zeigen dass das optimale $\vec{u}^*(t)$ wie folgt berechnet werden kann:

$$\boxed{\vec{u}^* = -\underline{K}\,\vec{x} \quad \text{falls} \quad \underline{K} = \underline{R}^{-1}\underline{B}^T\underline{P}}$$

wobei $\underline{P}$ die Lösung der Riccati Gleichung $\underline{A}^T\underline{P} + \underline{P}\,\underline{A} - \underline{P}\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1}\underline{B}^T\underline{P} + \underline{Q} = \underline{0}$ ist

für deren Lösung effiziente Lösungsverfahren

auch wenn obiger Ansatz von einer Minimierung von quadratischen Regelflächen ausgeht, so geht es bei diesem Verfahren der optimalen Regelung gar n. so sehr darum wirklich die kleinstmögliche Fläche zu erreichen, sondern vielmehr führt der Ansatz zu einem schlagkräftigen Verfahren, für verschiedene Variationen der Wichtungsmatrizen, stets stabile Regelkreise zu entwerfen

iterativer Prozess – unter Variation der Wichtungsmatrizen $\underline{Q}$, $\underline{R}$ soll dazu führen Verhalten der Regelstrecke tiefer zu durchdringen und ein für sich brauchbares Reglerverhalten zu erhalten «optimale Regelung», da Zielfunktion (Gütekriterium) minimiert wird

auch auf Deutsch wird meist der Englische Namen dieses Verfahrens verwendet:

Linear → lineares System; Quadratic → quadratisches Gütekriterium; Regulator → konstanten Sollwert; kurz LQR

zwei mögliche Varianten um $\underline{Q}$ und $\underline{R}$ zu wählen (diese mit Intuition + TAE kombinieren...):

1. $\underline{Q} = \underline{C}^T\underline{C}$ und $\underline{R} = \rho \underline{I}$

2. $\underline{Q} = \begin{pmatrix} 1/q_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/q_n^2 \end{pmatrix}$ und $\underline{R} = \begin{pmatrix} 1/r_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/r_m^2 \end{pmatrix}$

   wobei $q_i$ maximal erlaubter Wert von $x_i$ und $r_i$ maximal erlaubter Wert von $u_i$

weitere Tipps:

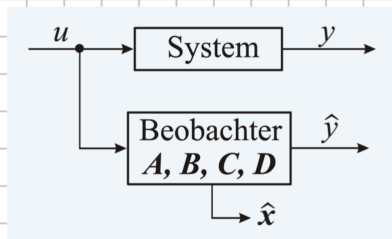
- oft $\underline{Q}$ oder $\underline{R}$ konstant lassen und nur eines der beiden verändern, da es insbesondere auf Verhältnis «$\underline{Q}:\underline{R}$» ankommt
- um Wirkung zu erzielen muss oft das Verhältnis in Schritten von Faktor 10 verändert werden!

Befehl zur Berechnung

K=place (A, B, v)   # berechnen K so, dass ($\underline{A}-\underline{B}\underline{K}$) die Polstellen $\vec{v}$ hat

# Zustandsbeobachter

um nichtgemessene Zustände rekonstruieren




erste Idee: mathematisches Modell parallel zum System simulieren und daraus Systemgrössen $\hat{\vec{x}}(t)$ beobachten $\longrightarrow$

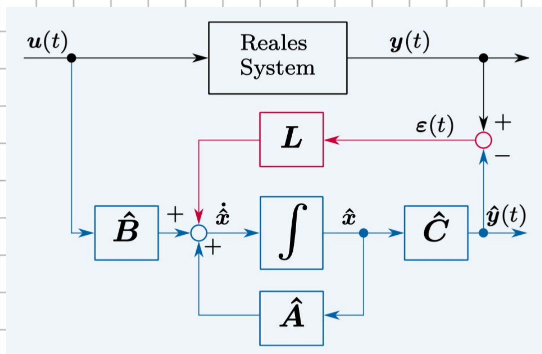
selbst bei exakter Modellierung (i.e. $\hat{\underline{A}} = \underline{A}$) ergibt sich für Beobachtungsfehler $\vec{e}(t)$ des Zustandes:

$$\vec{e}(t) = \vec{x}(t) - \hat{\vec{x}}(t) = e^{\underline{A}t}(\vec{x}_0 - \hat{\vec{x}}_0)$$

da $\vec{x}_0$ i.A. n. bekannt, verschwindet $\vec{e}(t)$ nur wenn alle Eigenwerte von $\underline{A}$ in LHE, andernfalls wächst $\vec{e}(t)$ kontinuierlich an

weiterer Nachteil wäre dass n. messbare Störgrössen lediglich auf reales System, nicht jedoch auf Beobachtersystem wirken, was ebenfalls zu Fehlern führen würde

## Luenberger Beobachter




zusätzlich findet ein Vergleich zwischen $\vec{y}$ und $\hat{\vec{y}}$ statt

Differenz dieser beiden $\vec{\varepsilon}(t) = \vec{y}(t) - \hat{\vec{y}}(t)$ wird wieder dem Systemmodell mit geeigneter Gewichtung zurückgeführt

solange $\vec{\varepsilon}(t) \neq 0$ ist, werden die Zustände korrigiert

stimmen $\vec{y}$ und $\hat{\vec{y}}$ überein, so nimmt man an dass auch die Zustände übereinstimmen, womit die nicht gemessenen Zustände geschätzt werden können (unter gewissen Bedingungen)

reales System: $\dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}\vec{x}(t) + \underline{B}\vec{u}(t)$, $\quad \vec{y}(t) = \underline{C}\vec{x}(t)$

Beobachter: $\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = \hat{\underline{A}}\hat{\vec{x}}(t) + \hat{\underline{B}}\vec{u}(t) + \underline{L}(\vec{y}(t) - \hat{\vec{y}}(t)) = \hat{\underline{A}}\hat{\vec{x}}(t) + \hat{\underline{B}}\vec{u}(t) + \underline{L}\,\underline{C}\vec{x}(t) - \underline{L}\hat{\underline{C}}\hat{\vec{x}}(t)$, $\quad \hat{\vec{y}}(t) = \hat{\underline{C}}\hat{\vec{x}}(t)$

Dimension der Rückführmatrix $\underline{L}$ ist $n \times r$, also gleich wie $\underline{C}^T$

angenommen $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ seien exakt bekannt, i.e. $\hat{\underline{A}} = \underline{A}$, $\hat{\underline{B}} = \underline{B}$, $\hat{\underline{C}} = \underline{C}$, dann ergibt sich für Beobachtungsfehler

$$\boxed{\dot{\vec{e}} = \dot{\vec{x}} - \dot{\hat{\vec{x}}} = \underline{A}\vec{x}(t) - \underline{A}\hat{\vec{x}}(t) - \underline{L}\,\underline{C}\vec{x}(t) + \underline{L}\,\underline{C}\hat{\vec{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})(\vec{x}(t) - \hat{\vec{x}}(t))}$$

mit $\vec{e}(t_0) = \vec{x}(t_0) - \hat{\vec{x}}(t_0)$

→ Beobachtungsfehler somit dynamischer Prozess ohne äussere Anregung
sollte gegen 0 gehen → System muss stabil sein

für Beobachtungsfehler $\vec{e}(t) = \vec{x}(t) - \hat{\vec{x}}(t)$ des Luenberger-Beobachters gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \|\vec{e}\| = 0$$

genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix $(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})$ negativen Realteil haben

→ man hat also über die frei zu bestimmende Matrix $\underline{L}$ die Möglichkeit, die Dynamik des Beobachtungsfehlers zu bestimmen (wobei Dynamik allein über Lage der Eigenwerte festgelegt ist)

Problem die Matrix $\underline{L}$ zu spezifizieren wird also auf Problem geeignete Eigenwerte für $(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})$ zu bestimmen überführt

## Berechnung der Rückführmatrix $\underline{L}$

damit $\underline{L}$ bestimmt werden kann, muss Sys $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ vollst. beobachtbar sein **!**

wie bei Auslegen des Zustandreglers, kann $\underline{L}$ mittels Polvorgabe bestimmt werden

$\boxed{|s\underline{I} - (\underline{A} - \underline{L}\underline{C})| \overset{!}{=} 0}$ $s_1, \ldots, s_n$ werden dann Beobachterpole genannt

falls Sys n. beobachtbar → gewisse Parameter von $\underline{L}$ kommen n. in char. Polynom vor und können somit nicht bestimmt werden

gibt wie bei Best. der Rückführmatrix bei Zustandsregler auch die Möglichkeit charakterist. Gleichung aus Beobachtungsnormalform zu erhalten

in Analogie zu LQR zum Auslegen der Zustandsrückführung gibt es ebenfalls ein Verfahren zur Auslegung des Beobachters (→ Kalman-Filter)

Bedarf, Zustandsvektor geeignet aus Ein- und Ausgangsgrössen d. Systems zu rekonstruieren ensteht aus Tatsache, dass bei Zustandsregelung nicht nur Systemausgang zurückgeführt wird, sondern gesamter Zustandsvektor

wenn Störgrössen und Messrauschen vernachlässigb. → Beobachtungsproblem
wenn Störgrössen mit stochastischem Charakter und Messrauschen vorhanden → Schätzproblem

dann wird Systembeschreibung zu:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}(t)\vec{x}(t) + \underline{B}(t)\vec{u}(t) + \vec{w}_s(t) \quad \text{mit } E\{\vec{w}_s(t)\} = \vec{0} \text{ und } E\{\vec{w}_s(t)\vec{w}_s^T(t)\} = \underline{Q}(t)$$

$$\vec{y}(t) = \underline{C}(t)\vec{x}(t) + \vec{w}_m(t) \quad \text{mit } E\{\vec{w}_m(t)\} = \vec{0} \text{ und } E\{\vec{w}_m(t)\vec{w}_m^T(t)\} = \underline{R}(t)$$

wobei $\vec{w}_s(t)$ und $\vec{w}_m(t)$ als normalverteilt mit $\mu = 0$ angenommen

$\underline{Q}(t)$ und $\underline{R}(t)$ sind Kovarianzmatrizen (können vereinfacht als diagonal angenommen werden)

analog zum Luenberger-Beobachter gilt:

$$\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = \underline{A}(t)\hat{\vec{x}}(t) + \underline{B}(t)\vec{u}(t) + \underline{L}(t)(\vec{y}(t) - \underline{C}(t)\hat{\vec{x}}(t))$$

beim Kalmanfilter wird $\underline{L}(t)$ derart festgelegt, dass $\vec{e}(t) = \vec{x}(t) - \hat{\vec{x}}(t)$ minimal wird

analog zum LQR-Verfahren ergibt sich nun, dass optimale Rückführmatrix $\underline{L}(t)$ gegeben ist durch:

$$\boxed{\underline{L}(t) = -\underline{P}(t)\underline{C}(t)\underline{R}^{-1}(t)}$$

wobei $\underline{P}(t)$ Lösung der Differential-Matrix-Riccati-Gleichung

$$\dot{\underline{P}}(t) = \underline{P}(t)\underline{A}^T(t) + \underline{A}(t)\underline{P}(t) - \underline{P}(t)\underline{C}(t)\underline{R}^{-1}(t)\underline{C}(t)\underline{P}(t) + \underline{Q}(t).$$

für zeitinvariante Systeme geht Kalman-Filter in eine statische Lösung für $\underline{L}$ und damit in ein LQR-Problem über, man spricht daher von einem LQE (E für Estimation) Problem

die hier verwendete zeitkontinuierliche Darstellung entspricht dem Kalman-Bucy-Filter, das eigentliche Kalman-Filter ist zeitdiskret formuliert und wurde vor der kontinuierlichen Lösung entwickelt

## Befehl zur Berechnung

L = (place(A.T, C.T, v)).T # denn es gilt $\operatorname{eig}(\underline{A}^T - \underline{C}^T\underline{L}^T) = \operatorname{eig}((\underline{A} - \underline{L}\underline{C})^T) = \operatorname{eig}(\underline{A} - \underline{L}\underline{C})$

## Störgrössenbeobachter

falls Modell d. z. beobachtenden Strecke im Beobachter fehlerhaft modelliert werden ist oder nicht messbare Störgrössen auf Modell wirken führt Zustandsbeobachter zu systematischen Fehlern bei Beobachtung

zweiter Punkt kann berücksichtigt werden indem n. messbare Störgrössen ebenfalls mittels Beobachter rekonstruiert werden:

$$\dot{\vec z}(t) = \underline{A}_f \vec z(t) + \underline{B}_f \vec\xi(t)$$
$$\vec f(t) = \underline{C}_f \vec z(t)$$

$\vec f$ wirkt auf System

→ unbekannt, unten vernachlässigt

$\vec z(t)$ sind Zustände einer inneren Dynamik der Störungen, $\vec\xi(t)$ Zufallsvariablen, die Prozess antreiben

$$\begin{pmatrix}\dot{\vec x}(t)\\ \dot{\vec z}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline A & \underline E\,\underline C_f\\ \underline 0 & \underline A_f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec x(t)\\ \vec z(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\underline B\\ \underline 0\end{pmatrix}\vec u(t) + \underbrace{\underline L(\vec y(t)-\hat{\vec y}(t))}_{\underline L\,\underline C(\vec x(t)-\hat{\vec x}(t))}, \quad \vec f(t) = (\underline 0\ \ \underline C_f)\begin{pmatrix}\vec x\\ \vec z\end{pmatrix}$$

$\underline E$ beschreibt wie Störgrösse $\vec f(t)$ in Zustände des eigentlichen Streckenmodells einkoppeln

die rekonstruierten Störkräfte können nun auf versch. Weisen weiterverarbeitet werden

## reduzierter Beobachter

zuvor dargestellte Zustandsbeobachtung nimmt Beobachtung des gesamten Zustandsvektors $\vec x(t)$ mit $n$ Zuständen entgegen

dieses Vorgehen jedoch nicht die Tatsache, dass $r$ Messwerte als reale Grössen vorliegen und entsprechend viele Zustände eigentlich gar nicht beobachtet werden müssten (die $r$ Messungen sind Linearkombinationen der $n$ Zustände)

es wäre somit sinnvoll lediglich die nicht-gemessenen Zustände mittels Beobachter zu rekonstruieren

Sys in ZR-Beschreibung kann in folgende Form gebracht werden:

$$\begin{pmatrix}\dot{\vec x}_1(t)\\ \dot{\vec x}_2(t)\end{pmatrix} = \underline A\begin{pmatrix}\vec x_1(t)\\ \vec x_2(t)\end{pmatrix} + \underline B\,\vec u(t), \quad \vec y(t) = (\underline C_1\ \ \underline C_2)\begin{pmatrix}\vec x_1(t)\\ \vec x_2(t)\end{pmatrix}$$ so dass $\underline C_1$ regulär

dazu muss man Zustandsvariablen umsortieren (1), sodass die ersten $r$ Spalten von $\underline C$ ($r = \#$ Ausgänge) linear unabhängig (immer möglich, da $\text{rang}(\underline C) = r$)

daraus lässt sich eine Transformation in neue Koordinaten (2) definieren:

$$\begin{pmatrix}\vec y\\ \vec x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline C_1 & \underline C_2\\ \underline 0 & \underline I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec x_1\\ \vec x_2\end{pmatrix} = \underline T\begin{pmatrix}\vec x\\ \vec x_2\end{pmatrix}$$ mit $\underline T$ regulär

neue Zustände setzen sich also zusammen aus gemessenen Grössen $\vec y$ und weiteren Zuständen $\vec x_2$
→ man spricht hier auch von Sensorkoordinaten

aus Beobachtungsgleichung (rechte Seite oben) folgt $\vec x_1(t) = \underline C_1^{-1}(\vec y(t) - \underline C_2\vec x_2(t))$

wenn also die $n-r$ Zustände in $\vec x_2$ beobachtet werden, dann ergeben sich die $r$ Zustände in $\vec x_1$ unmittelbar aus Beobachtungen sowie aus den Messungen $\vec y$

→ genügt also $n-r$ Zustände beobachten um daraus gesamten Zustandsvektor zu rekonstruieren

neue Zustandsraumbeschreibung (nach Transformation mit $\underline T$):

$$\begin{pmatrix}\dot{\vec y}(t)\\ \dot{\vec x}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline A_1 & \underline A_2\\ \underline A_3 & \underline A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec y(t)\\ \vec x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\underline B_1\\ \underline B_2\end{pmatrix}\vec u(t), \quad \vec y(t) = (\underline I\ \ \underline 0)\begin{pmatrix}\vec y(t)\\ \vec x_2(t)\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\dot{\vec x}_2(t) \overset{\dagger}{=} \underline A_4\vec x_2(t) + (\underline A_3\vec y(t) + \underline B_2\vec u(t))}_{\text{Zustandsgleichung}}, \quad \underbrace{\tilde{\vec y}(t) \overset{\S}{=} \dot{\vec y}(t) - \underline A_1\vec y(t) - \underline B_1\vec u(t)}_{\text{Beobachtungsgleichung}} \quad (\text{mit } \tilde{\vec y}(t) :\overset{\ddagger}{=} \underline A_2\vec x_2(t))$$

→ daraus lässt sich nun (analog zu Zustandsbeobachter) ein Beobachter konstruieren

dazu benötigt man ein Modell in Zustandsraumbeschreibung mit dem zu beobachtenden Zustand als dynamische Grösse, die durch bekannte Grössen angetrieben wird (†)
dies führt über eine Beobachtungsgleichung (‡) zu einer Grösse ($\hat{\vec{y}}$), die mit einer messbaren Grösse verglichen werden kann (§)
um Beobachter zu vervollständigen, subtrahieren wir ‡ von § und führen Differenz gewichtet wieder Modell zu:

$$\dot{\hat{\vec{x}}}_2(t) = \underline{A_4}\,\hat{\vec{x}}_2(t) + \left(\underline{A_3}\,\vec{y}(t) + \underline{B_2}\,\vec{u}(t)\right) + \underline{L}\left(\dot{\vec{y}}(t) - \underline{A_2}\,\hat{\vec{x}}_2(t)\right)$$
$$= (\underline{A_4} - \underline{L}\,\underline{A_2})\hat{\vec{x}}(t) + (\underline{A_3} - \underline{L}\,\underline{A_1})\vec{y}(t) + (\underline{B_2} - \underline{L}\,\underline{B_1})\vec{u}(t) + \underline{L}\,\dot{\vec{y}}(t)$$
Beobachter

dabei ist störend, dass Ableitung der messbaren Grösse $\dot{\vec{y}}(t)$ auftritt, da dies bei Implementierung oft Probleme bereitet

um Ableitung zu umgehen, kann man folgende Transformation vornehmen: $\hat{\vec{z}} = \hat{\vec{x}}_2 - \underline{L}\,\vec{y}$

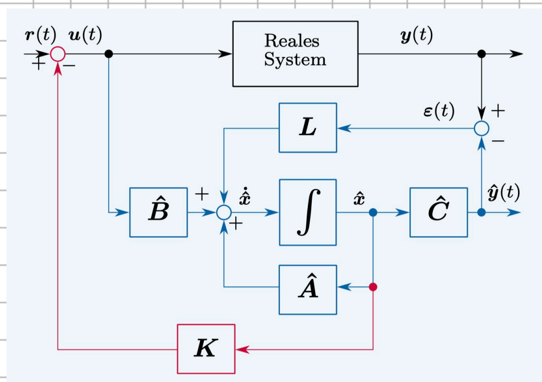
bei Einsetzen in obige Gleichung erscheint auf linker Seite neu der Term $\underline{L}\,\dot{\vec{y}}(t)$, welcher sich mit jenem auf der rechten Seite aufhebt:

$$\boxed{\dot{\hat{\vec{z}}}(t) = (\underline{A_4} - \underline{L}\,\underline{A_2})\hat{\vec{z}}(t) + (\underline{A_3} + \underline{A_4}\,\underline{L} - \underline{L}\,\underline{A_1} - \underline{L}\,\underline{A_2}\,\underline{L})\vec{y}(t) + (\underline{B_2} - \underline{L}\,\underline{B_1})\vec{u}(t)}$$
reduzierte Beobachter

gesuchte Zustand muss wieder zurücktransformiert werden mit: $\hat{\vec{x}}_2 = \hat{\vec{z}} + \underline{L}\,\vec{y}$

Berechnung der Rückführmatrix $\underline{L}$ erfolgt analog dem Fall für den vollständigen Zustandsbeobachter:
es müssen $n-r$ Eigenwerte der Matrix $(\underline{A_4} - \underline{L}\,\underline{A_2})$ vorgegeben werden (zuvor war es $(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})$)
$\underline{L}$ ist $(n-r)\times r$-Matrix

## Zustandsregelung mit Beobachter




statt dem gemessenen $\vec{x}$ wird der beobachtete Zustand $\hat{\vec{x}}$ mit $\underline{K}$ multipliziert und zurückgeführt

dynamische Gleichungen für $\vec{x}$ und $\hat{\vec{x}}$ ergeben sich (unter Annahme, dass $\hat{\underline{A}} = \underline{A}$, $\hat{\underline{B}} = \underline{B}$, $\hat{\underline{C}} = \underline{C}$) durch:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}\,\vec{x}(t) + \underline{B}\,\vec{r}(t) - \underline{B}\,\underline{K}\,\hat{\vec{x}}(t)$$
$$\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = \underline{A}\,\hat{\vec{x}}(t) + \underline{B}\,\vec{r}(t) - \underline{B}\,\underline{K}\,\hat{\vec{x}}(t) + \underline{L}\,\underline{C}\left(\vec{x}(t) - \hat{\vec{x}}(t)\right)$$

diese Gleichungen beschreiben Zustandsgleichung des gesamten geschlossenen Systems und lauten in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \dot{\hat{\vec{x}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & -\underline{B}\,\underline{K} \\ \underline{L}\,\underline{C} & \underline{A} - \underline{B}\,\underline{K} - \underline{L}\,\underline{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \hat{\vec{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{B} \\ \underline{B} \end{pmatrix} \vec{r} = \underline{A_G}\,\vec{\xi} + \underline{B_G}\,\vec{r}$$

Analyse einfacher wenn mit Ähnlichkeitstrafo in System mit Zuständen $\tilde{\vec{\xi}} = (\vec{x}\ \vec{e})^T$ wobei $\vec{e} = \vec{x} - \hat{\vec{x}}$ Beobachtungsfehler eingeführt wird:

$$\tilde{\vec{\xi}} \overset{!}{=} \underline{T} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \hat{\vec{x}} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{T} = \begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{I} & -\underline{I} \end{pmatrix} \qquad \text{man beachte } \underline{T}^{-1} = \underline{T} \text{ (involutorische Matrix)}$$

$$\boxed{\tilde{\underline{A}}_G = \underline{T}\,\underline{A_G}\,\underline{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{A} - \underline{B}\,\underline{K} & \underline{B}\,\underline{K} \\ \underline{0} & \underline{A} - \underline{L}\,\underline{C} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{B}}_G = \underline{T}\,\underline{B_G} = \begin{pmatrix} \underline{B} \\ \underline{0} \end{pmatrix}}$$

aufgrund der Gestalt (Blockdreiecksmatrix) von $\tilde{\underline{A}}_G$ gilt $\det \tilde{\underline{A}}_G = \det(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}) \cdot \det(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})$

also ergeben sich die Eigenwerte des Gesamtsystems aus den Eigenwerten von $\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}$ (also der Dynamik d. geschlossenen Regelkreises) und $\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C}$ (also der Dynamik d. geschlossenen Beobachterkreises):

$$\boxed{P_{\underline{A}_{Ges}} = P_{\underline{A}-\underline{B}\underline{K}} \cdot P_{\underline{A}-\underline{L}\underline{C}} = (s - s_1^R)\cdots(s - s_n^R)\cdot(s - s_1^B)\cdots(s - s_n^B)}$$

man kann also Dynamik d. geschlossenen Systems unabhängig von Dynamik d. Beobachters wählen (und umgekehrt):

<u>Separationstheorem:</u> wenn Regelstrecke steuerbar & beobachtbar, so können Pole für Zustandsregelung sowie Pole für Zustandsbeobachter unabhängig voneinander gewählt werden

man erkennt an $\tilde{\underline{A}}_G$ des weiteren:

i) Dynamik d. Beobachtungsfehler $\vec{e}(t)$ hängt nicht von Systemzuständen $\vec{x}(t)$ ab

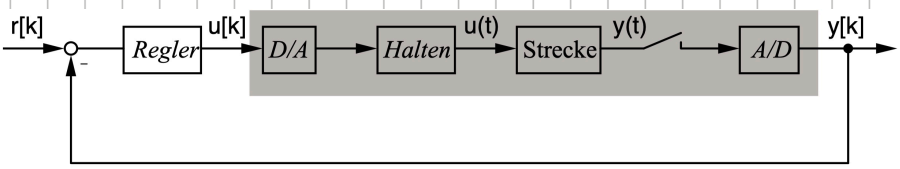
ii) Dynamik d. geschlossenen Regelkreises $\dot{\vec{x}}(t)$ hängt von Beobachtungsfehler $\vec{e}(t)$ ab

$\rightarrow$ es ist daher wichtig diesen möglichst klein zu halten, damit Güte d. geschl. Regelkr. nicht beeinträchtigt wird

man beachte:

- Separationstheorem gilt strikte nur für Systeme mit genau bekannten Systemmatrizen (leider oft nicht der Fall)
- damit Beobachtungsfehler $\vec{e}(t)$ Regelgüte nicht negativ beeinflusst (durch Kopplung $\underline{B}\,\underline{K}$ in Gleichung für $\tilde{\underline{A}}_G$) sollte Dynamik d. Beobachtungsfehlers schneller als Dynamik d. geschl. Kreises gewählt werden, i.e. Eigenwerte von $(\underline{A}-\underline{L}\,\underline{C})$ sollten weiter links (Faustregel: Faktor 2-5) von $(\underline{A}-\underline{B}\,\underline{K})$ liegen

# Diskrete Regelsysteme




meiste zu regelnde Systeme zwar TP-Verhalten, aber dennoch auch in höherfrequenten Bereichen Signalkomponenten
→ Abtasttheorem in RT untergeordnete Rolle, da Voraussetzung selten erfüllt
→ Effekt d. Aliasing muss aber genügend klein gehalten werden!

Faustformel: $\omega_T$ sollte ca. 25…40-fache von $\omega_B$ des geschlossenen Kreises betragen
→ siehe Abtastregelung

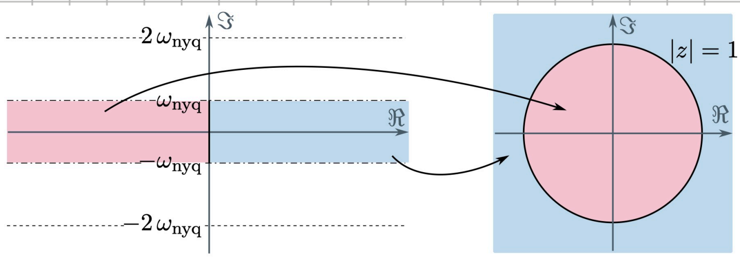
## Differenzengleichung

$$\boxed{y_k = \sum_{\nu=0}^{q} b_\nu u_{k-n+\nu} - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu y_{k-n+\nu}}$$

→ die aus kontinuierlichen Systemen bekannten üblichen Bezeichnungen mit Koeffizienten $a_\nu$ und $b_\nu$ werden hier übernommen, allerdings sind die Zahlenwerte völlig anders wenn es abgetastet wird

Bsp Fibonacci: $y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$ mit Anfangswerten $y_1 = y_2 = 1$
→ Differenzengleichung ohne Systemerregung $u_k$ mit Koeffizienten $b_\nu = 0 \;\forall \nu$, $a_0 = -1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_\nu = 0 \;\forall \nu > 2$
→ Zahlenfolge ergibt sich rein aus Anfangsbedingungen und kann als Eigenbewegung des Systems aufgefasst werden

## z - Transformation




Laurentreihe
zeitdiskretes Gegenstück zu Laplace-Trafo

abgetastetes Signal (Dirac-Kamm):

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)\,\delta(t-kT_s)$$

$$F^*(s) = \mathcal{L}\{f^*(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)\,\delta(t-kT_s)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)\,e^{-skT_s} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot (e^{sT_s})^{-k}$$

Substitution von $e^{sT_s}$ durch Variable $z$ ergibt:

$$\boxed{F^*(s) = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, z^{-k}}$$

→ periodisch mit $\omega_{nyq}$

im z-Bereich fehlt also redundante Information ausserhalb Streifen $\omega = (-\omega_{nyq}, \omega_{nyq})$

Eigenschaften:
- Linearität
- Rechtsverschiebung: $f_{k-m}$ ○—● $z^{-m} F(z)$ $m = 1, 2, \dots$
- Linksverschiebung: $f_{k+m}$ ○—● $z^m F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f_\nu z^{m-\nu}$ $m = 1, 2, \dots$
- Differenzensatz: $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$ ○—● $(z-1)F(z) - z f(0)$
- Summensatz: $\sum_{n=0}^{k} f_n$ ○—● $\frac{z}{z-1} F(z)$
- Faltungssatz: $f_k * g_k = \sum_{n=0}^{k} f_{k-n} g_n = \sum_{n=0}^{k} f_n g_{k-n}$ ○—● $F(z) \cdot G(z)$
- Anfangswertsatz: $f_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)$
- Endwertsatz: $\lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{z\to 1} (z-1) F(z)$

} dürfen nicht verwendet werden um Existenz des Grenzwertes zu beweisen

z-Rücktransformation:

$$\boxed{f_k = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)\, z^{k-1}\, dz \quad \text{wobei Kurve alle Polstellen von } F(z) \text{ umschliessen muss}}$$

# z-UTF (Systemfunktion)

z-Transformierte der Gewichtsfolge:

$$G(z) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; g_k \quad \text{resp.} \quad G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}$$

aus Differenzengleichung:

$$a_n y_{k+n}+\dots+a_0 y_k = b_n u_{k+n}+\dots+b_0 u_k$$

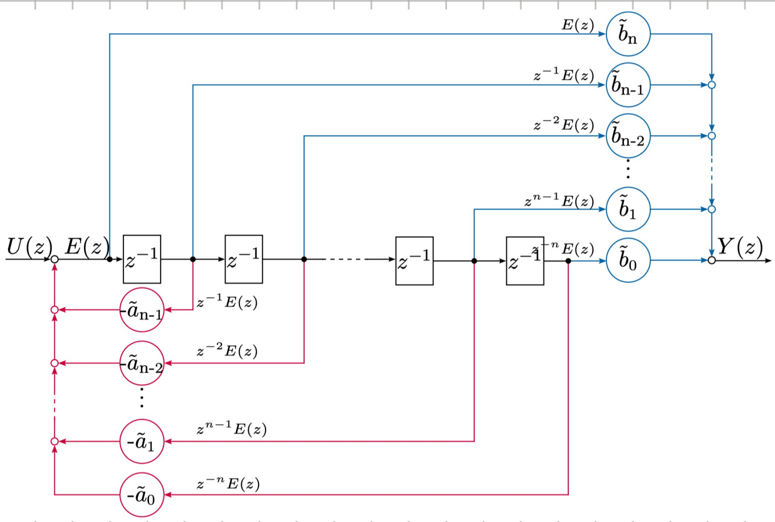
$$a_n z^n Y(z)+\dots+a_0 Y(z) = b_n z^n U(z)+\dots+b_0 U(z)$$

$$\Updownarrow$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_n z^n+\dots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+\dots+a_1 z+a_0}$$

$$=\frac{\tilde{b}_n+\dots+\tilde{b}_1 z^{1-n}+\tilde{b}_0 z^{-n}}{1+\tilde{a}_{n-1}z^{-1}+\dots+\tilde{a}_1 z^{1-n}+\tilde{a}_0 z^{-n}}\cdot\frac{E(z)}{E(z)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Y(z)=(\tilde{b}_n+\tilde{b}_{n-1}z^{-1}+\dots+\tilde{b}_1 z^{1-n}+\tilde{b}_0 z^{-n})\cdot E(z) & \text{blauer Teil Abbildung} \\ E(z)=U(z)-\tilde{a}_{n-1}z^{-1}E(z)-\dots-\tilde{a}_1 z^{1-n}E(z)-\tilde{a}_0 z^{-n}E(z) & \text{roter Teil Abbildung} \end{cases}$$

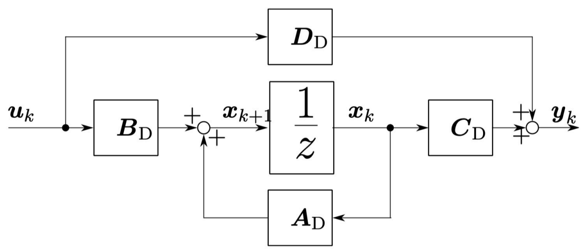



Frequenzgang erhält man mit $z=e^{j\omega T_s}$

abgesehen von Zeitkonstantendarstellung kann man die z-UTF auch in ander Darstellungsformen wie Polynomform, Pol-Nullstellenform und Summendarstellung bringen

## Zustandsraumdarstellung

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}_{k+1} &= \underline{A}_D\,\vec{x}_k + \underline{B}_D\,\vec{u}_k && \text{Zustandsgleichung} \\ \vec{y}_k &= \underline{C}_D\,\vec{x}_k + \underline{D}_D\,\vec{u}_k && \text{Ausgangsgleichung} \end{aligned}}$$




im BSB Integrator durch backshift Operator $\frac{1}{z}=z^{-1}$ ersetzen

$$G(z)=\frac{\vec{Y}(z)}{\vec{U}(z)}=\underline{C}_D(z\underline{I}-\underline{A}_D)^{-1}\underline{B}_D+\underline{D}_D$$

ZRD aus Differenzengleichung (wobei $a_n=1$ und $n=q$):

$$\underline{A}_D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \underline{B}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{C}_D=(b_0-b_n a_0,\ \dots,\ b_{n-1}-b_n a_{n-1}), \qquad \underline{D}=b_n$$

Regelungsnormalform

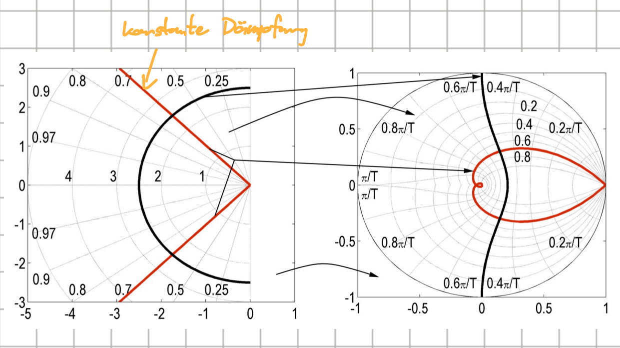
BSB aus ZRD:

- Anzahl $z^{-1}$ Operatoren = Anzahl Zustände $n$
- von hinten nach vorne Zustände durchnummerieren (ganz links $n$, ganz rechts 1)
- $x_k^{(i)}$ ist jeweils hinter/rechts von $z^{-1}$ Operator, $x_{k+1}^{(i)}$ davor/links
- Differenzengleichungen entsprechend Zustandsgleichungen ergänzen
- Ausgangsgleichung

## Transformation $s \rightarrow z$

$z=e^{sT_s}$ (Frequenzgang: $z=e^{j\omega T_s}$)

$\rightarrow$ Ursprungsgeraden auf herzförmige Kurven



# Diskretisierung von kontinuierlichen UTFs

## Finite Differenzen Methode

$$\boxed{\underline{A}_D = \underline{I} + T_s \underline{A}, \quad \underline{B}_D = T_s \underline{B}, \quad \underline{C}_D = \underline{C}, \quad \underline{D}_D = \underline{D}}$$

## Exakte Diskretisierung

Lösung der Bewegungsgleichung im Kontinuierlichen:

$$\vec{x}(t) = e^{\underline{A}t}\vec{x}_0 + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\,u(\tau)\,d\tau$$

Abtasten mit $T_s$:

$$\vec{x}((k+1)T_s) = \vec{x}_{k+1} = e^{\underline{A}(k+1)T_s}\vec{x}_0 + \int_0^{(k+1)T_s} e^{\underline{A}((k+1)T_s-\tau)}\underline{B}\,u(\tau)\,d\tau$$

$$= e^{\underline{A}T_s}\left(e^{\underline{A}kT_s}\vec{x}_0 + \int_0^{kT_s} e^{\underline{A}(kT_s-\tau)}\underline{B}\,u(\tau)\,d\tau\right) + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{\underline{A}((k+1)T_s-\tau)}\underline{B}\,u(\tau)\,d\tau$$

$$= e^{\underline{A}T_s}\vec{x}_k + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{\underline{A}((k+1)T_s-\tau)}\underline{B}\,u(\tau)\,d\tau$$

hintere Integral beschreibt nur noch Einfluss der Stellgrösse im letzten Zeitschritt, dort ist diese aber konstant $u(\tau) = u(kT_s) = u_k$ und kann somit aus Integral gezogen werden:

$$\vec{x}_{k+1} = e^{\underline{A}T_s}\vec{x}_k + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{\underline{A}((k+1)T_s-\tau)}\underline{B}\,d\tau\, u_k$$

Substitution $\tau' = (k+1)T_s - \tau$:

$$\vec{x}_{k+1} = e^{\underline{A}T_s}\vec{x}_k - \int_{T_s}^{0} e^{\underline{A}\tau'}\underline{B}\,d\tau'\,u_k = e^{\underline{A}T_s}\vec{x}_k + \int_0^{T_s} e^{\underline{A}\tau'}\underline{B}\,d\tau'\,u_k = \underline{A}_D\vec{x}_k + \underline{B}_D u_k$$

Matrizen d. diskreten Modells werden also wie folgt aus der kontinuierlichen Beschreibung erhalten:

$$\boxed{\underline{A}_D = e^{\underline{A}T_s}, \quad \underline{B}_D = \int_0^{T_s} e^{\underline{A}\tau}d\tau\,\underline{B}, \quad \underline{C}_D = \underline{C}, \quad \underline{D}_D = \underline{D}}$$

wenn $\underline{A}$ regulär ist, kann $\underline{B}_D$ geschlossen ausgedrückt werden:

$$\underline{B}_D = \int_0^{T_s} e^{\underline{A}\tau}d\tau\,\underline{B} = \underline{A}^{-1}e^{\underline{A}\tau}\Big|_0^{T_s}\underline{B} = \underline{A}^{-1}\left(e^{\underline{A}T_s} - \underline{I}\right)\underline{B}$$

da Eigenwerte $\mathrm{eig}(\underline{A}_D) = \mathrm{eig}(e^{\underline{A}T_s}) \Rightarrow$ stabiles kont. Sys. bleibt stabil im diskreten

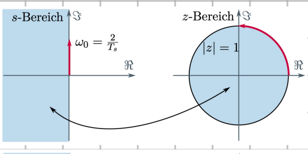
mit der Approximation $e^{\underline{M}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\underline{M}^k \approx \underline{I} + \underline{M}$ erhält man wieder die Resultate der MFE

## ZOH-Transformation / sprunginvariante Transformation

$$\boxed{G(z) = \mathcal{Z}\{g_k\} = \mathcal{Z}\{h_k - h_{k-1}\} = \mathcal{Z}\{h(t)\} - \mathcal{Z}\{h(t-T_s)\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\{h(t)\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}}$$

kann i.A. exakten Diskretisierung gleichgesetzt werden, da man in beiden Fällen von konstanten Eingangswerten $u_k$ während Abtastintervall ausgeht

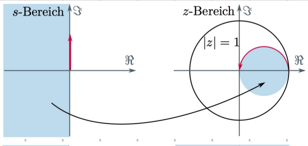
Bilineare Trafo




## Bilineare Transformation (Tustin Verfahren)

$$z = e^{sT_s} \Rightarrow s = \frac{\log(z)}{T_s} = \frac{2}{T_s}\left(\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \dots\right) \approx \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$$

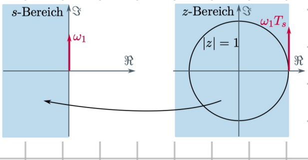
Euler Rückw.




## Euler-Verfahren

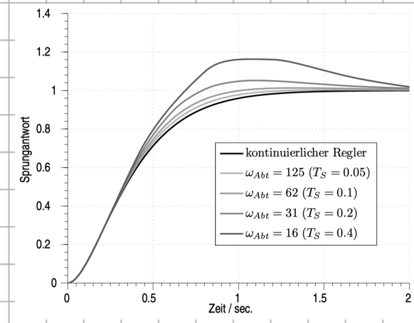
Rückwärts: $\quad s \rightleftharpoons \frac{1}{T_s}\frac{z-1}{z} \quad$ resp $\quad y_k = y_{k-1} + T_s u_k$

Euler Vorw.




Vorwärts: $\quad s \rightleftharpoons \frac{z-1}{T_s} \quad$ resp $\quad y_k = y_{k-1} + T_s u_{k-1}$

# Abtastregelung




aus Sicht des Abtastreglers wird die eigentlich kontinuierliche Strecke wie ein zeitdiskretes System «gesehen»
→ formale Beschreibung ist dabei ein zeitdiskretes System, welches mittels Diskretisierung aus diskretem System gewonnen

Approximation ZOH-Trafo im kontinuierlichen:

$$\boxed{\varphi^{Verlust}_{Abtast}(\omega) = -\omega \, T_s/2}$$ Totzeitglied mit $T_t = T_s/2$

Abtasten einer Regelstrecke führt also im Wesentlichen zu einer Zeitverzögerung von $T_s/2$

für offene Ketten mit I-Verhalten, ist Bandbreite des geschlossenen Systems etwa Durchtrittspunkt des Amplitudenganges durch die 0-dB Linie

soll nun System mit Abtastregler betrieben werden, so führt dies zu einem weiteren Phasenverlust $\varphi^{Verlust}_{Abtast}$

i.A. sind 5-7° Phasenverluste tolerierbar womit wir folgendes erhalten:

$$\boxed{\varphi^{Verlust}_{Abtast} \approx 5 \ldots 7 \cdot \frac{\pi}{180} \overset{!}{=} \frac{\omega_B \cdot T_s}{2} \Rightarrow T_s \approx \frac{1}{4 \ldots 6} \frac{1}{\omega_B} \text{ resp. } \omega_T \approx 25 \ldots 40\, \omega_B}$$

wobei $\omega_B$ die closed-loop Bandbreite in rad/s bezeichnet

## Wurzelortskurve

Abtastsysteme werden bei Rückkopplung bei Erhöhung der Reglerverstärkung k stets irgendwann instabil

# Linearisierung von Systemen n. Ordnung

umschreiben in System 1. Ordnung (geht immer)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_q) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_q) \end{pmatrix} \quad \text{resp} \quad \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x},\vec{u})$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ &\vdots \\ x_n &= x^{(n-1)} \end{aligned}}$$

## 1. Schritt: Arbeitspunkt bestimmen

→ Ruhelage

Linearisierung erfolgt immer an einem stationären Arbeitspunkt

$$\vec{f}(\vec{x},\vec{u}) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{x}_0, \vec{u}_0$$

## 2. Schritt: Δ-Grössen festlegen

$\vec{x} = \vec{x}_0 + \Delta\vec{x}$, $\vec{u} = \vec{u}_0 + \Delta\vec{u}$ (es folgt unmittelbar $\dot{\vec{x}} = \Delta\dot{\vec{x}}$, $\dot{\vec{u}} = \Delta\dot{\vec{u}}$)

## 3. Schritt: Lineare Approximationen bestimmen

$$\underline{A} = \frac{\partial}{\partial\vec{x}}\vec{f}(\vec{x},\vec{u})\Big|_{\substack{\vec{x}=\vec{x}_0 \\ \vec{u}=\vec{u}_0}} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \underline{B} = \frac{\partial}{\partial\vec{u}}\vec{f}(\vec{x},\vec{u})\Big|_{\substack{\vec{x}=\vec{x}_0 \\ \vec{u}=\vec{u}_0}} \in \mathbb{R}^{n\times q}$$

$$\vec{f}(\vec{x},\vec{u}) = \vec{f}(\vec{x}_0+\Delta\vec{x}, \vec{u}_0+\Delta\vec{u}_0) = \underline{A}\Delta\vec{x} + \underline{B}\Delta\vec{u} + O^2 \approx \underline{A}\Delta\vec{x} + \underline{B}\Delta\vec{u}$$

## 4. Schritt: Lineares System

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) = \Delta\dot{\vec{x}}$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\vec{x}} &= \underline{A}\Delta\vec{x} + \underline{B}\Delta\vec{u} \\ \Delta\vec{y} &= \underline{C}\Delta\vec{x} + \underline{D}\Delta\vec{u} \end{aligned}$$

Jacobi-Matrizen entsprechen gerade $\underline{A}$ und $\underline{B}$ der ZRD

abschliessend ersetzt man oft die Δ-Variablen durch die ordinären Variablen