

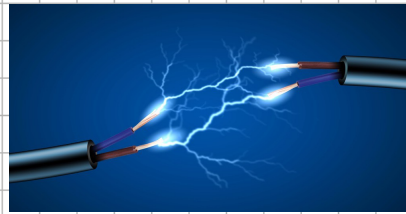
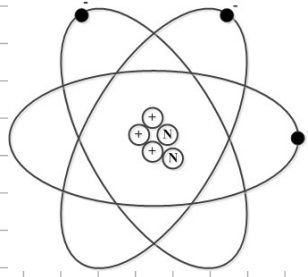
Grundbegriffe

Ladung

$$[q] = As = C$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} As$$

Ladung Elektron: $-e$



Strom

$$[I] = \frac{As}{s} = A$$

$$I(t) = \dot{Q}(t) \quad \text{falls } I(t) \text{ konstant: } I(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$



transportierte Ladung nach Medium:

Metalle: Elektronen

Halbleiter: Elektronen und Löcher

Elektrolyte: Ionen

Strom $\rightarrow$ gerichtete Grösse (Betrag & Richtung)

Teilchendichte $n \rightarrow$ viele Teilchen pro Volumen (z.B. Elektronen, Löcher, Ionen)

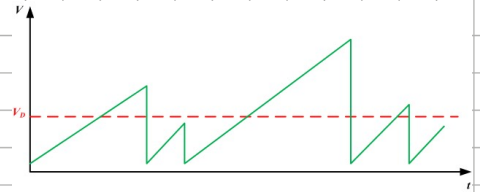
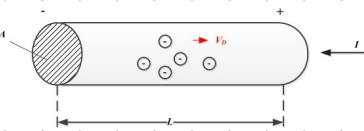
$$[n] = \frac{1}{m^3}$$

Elektronendichte Metall: $\gg 1e/\text{Atom}$

Driftgeschwindigkeit $v_D \rightarrow$ mittlere Geschw. (beschl. durch E-Feld, abgebremst durch Kollisionen)

$$|I| = \frac{Q}{t} = \frac{ALne}{\frac{L}{v_D}} = Anev_D$$

$$j = \frac{|I|}{A} = nev_D \quad [j] = \frac{A}{m^2}$$



Transportmechanismen

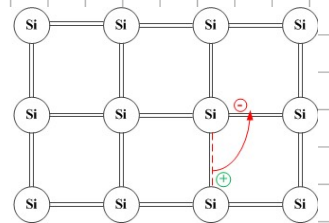
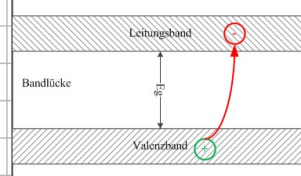
metallische Leiter $\rightarrow$ ein Teil d. e^- quasi ungebunden und frei beweglich

Halbleiter (Si, Ge, Se, B, etc)

spez. Widerstand grösser als Metalle, kleiner als Isolatoren

$T=0 \rightarrow$ alle e^- gebunden, $T>0 \rightarrow$ einige e^- vom Valenz- ins Leitungsband $\Rightarrow$ Loch & freies e^-

e^- können nicht beliebige (kin.) E haben, sondern erlaubte & verbotene E-Bänder



Leitfähigkeit durch Anzahl freier e^- und Löcher bestimmt $\rightarrow$ stark temp. abhängig

$\hookrightarrow$ durch Dotierung mit Fremdatomen kann man Anzahl der zur Verfügung stehenden Ladungsträger erhöhen

n-Dotierung: mehr e^- als Löcher

p-Dotierung: mehr Löcher als e^-

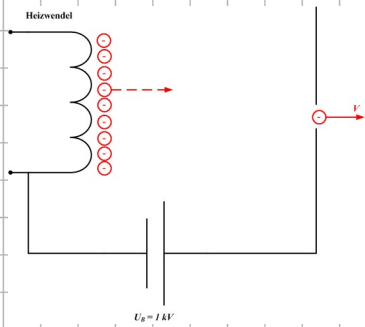
} mehrere Schichten kombinieren $\Rightarrow$ Transistor

Spannung

$$[U] = V$$

$$W_{el} = q \cdot U \Rightarrow [U] = \left[\frac{F \cdot l}{q} \right] = \frac{Nm}{C} = \frac{kgm^2}{As^3}$$

$$W_m = F \cdot l$$

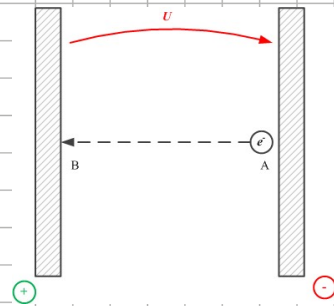


Kathodenstrahlröhre:

$$E_{kin} = W_{el}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = eU$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$



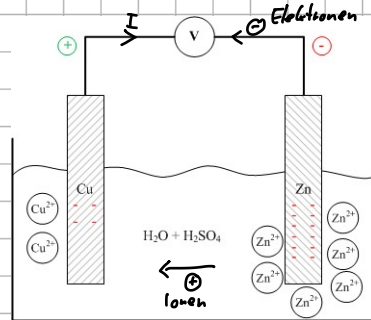
Techn. Möglichkeiten zur Erzeugung von Spannung

viele, einige Verfahren:

- chem. Vorgänge
↳ galvanische Elemente und Batterien

edleres Metall → Pluspol

unedlere Elektrode löst sich auf und scheidet sich an edleren ab



Neigung zur Oxidation $Me \rightarrow Me^{z+} + ze^{-}$		Neigung zur Reduktion $Me^{z+} + ze^{-} \rightarrow Me$
Edelmetalle	Au / Au³⁺ Pt / Pt²⁺ Pd / Pd²⁺ Hg / Hg²⁺ Ag / Ag⁺ 2 Hg / Hg₂²⁺ Cu / Cu⁺ Cu / Cu²⁺ H₂ / 2 H⁺	je stärker, desto edler
	Fe / Fe³⁺ Pb / Pb²⁺ Sn / Sn²⁺ Ni / Ni²⁺ Co / Co²⁺ Cd / Cd²⁺ Fe / Fe²⁺ Cr / Cr³⁺ Zn / Zn²⁺ Mn / Mn²⁺ Al / Al³⁺ Mg / Mg²⁺ Na / Na⁺ Ca / Ca²⁺ Ba / Ba²⁺ K / K⁺ Li / Li⁺	je stärker, desto unedler
	unedle Metalle	

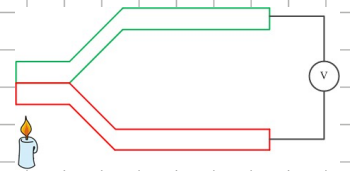
- Wärme - Thermoelement

2 verschiedene Metalle an einer Seite verbunden

Erwärmung Kontaktstelle $\Rightarrow$ (Thermo) Spannung

ΔT zwischen freien Enden & Kontaktstelle entscheidend
materialabhängig

→ Temperaturfühler



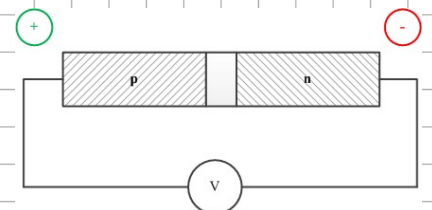
- Licht

pn-Übergang mit Licht bestrahlen $\Rightarrow$ Spannung

1 γ kann 1 e^{-} freisetzen

→ Fotoelement (Detektor von Licht)

→ Solarzelle

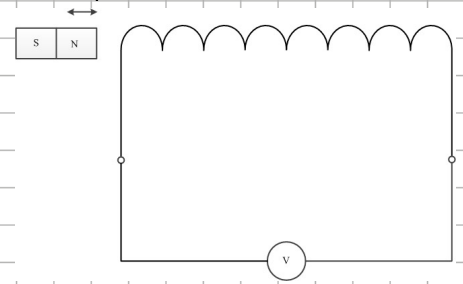


• Induktion

zeitveränderlicher magnetischer Fluss $\Rightarrow$ Induktionsspannung

$$B \sim I$$

$$U = \frac{dB}{dt}$$



Ohm'scher Widerstand

U-I-Kennlinie Gerade durch Nullpunkt

$$R = \frac{U}{I} \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega \quad \text{Widerstand}$$

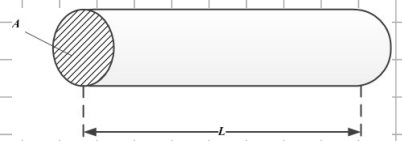
$$G = \frac{I}{U} \quad [G] = \frac{A}{V} = S \quad \text{Leitwert}$$

$$R \sim \frac{L}{A}, \quad R = \rho \frac{L}{A}$$

$$\rho = \frac{RA}{L} \quad [\rho] = \frac{\Omega m^2}{m} = \Omega m \quad \text{spezifischer Widerstand}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad [\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = \frac{S}{m} \quad \text{elektrische Leitfähigkeit}$$

$$G = \sigma \frac{A}{L} \quad (R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{L} = \sigma \frac{A}{L})$$



oft stark T-abhängig (außer gewisse Speziallegierungen)

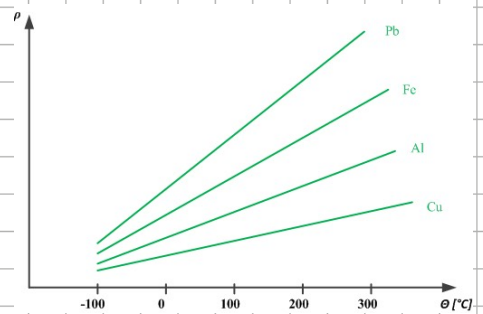
höhere T $\Rightarrow$ stärkere Gittervibrationen $\Rightarrow$ e werden auf Weg durch Metall behindert

$$\rho(T) = \rho_{20} (1 + \alpha_{20} (T - 293K))$$

$\alpha_{20} \rightarrow$ wie stark vergrößert sich Widerstand pro 1K

$$[\alpha_{20}] = \frac{1}{K} \quad (\text{oft in ppm}(10^{-6}))$$

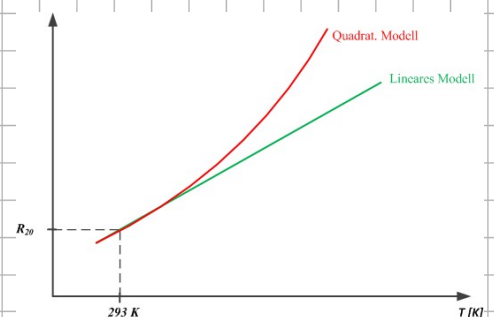
$$R(T) = R_{20} (1 + \alpha_{20} (T - 293K))$$



erweitertes T-Modell:

$$R(T) = R_{20} (1 + \alpha_{20} \Delta T + \beta_{20} (\Delta T)^2)$$

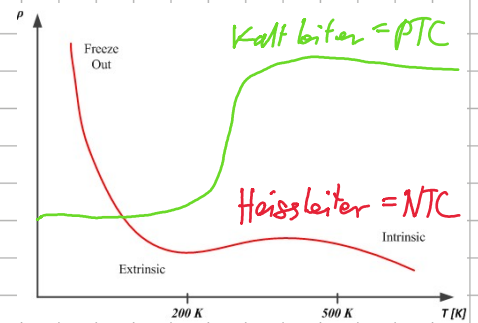
$$[\beta_{20}] = \frac{1}{K^2}$$



Halbleiter => andere T-Abhängigkeit

2 gegenläufige Effekte:

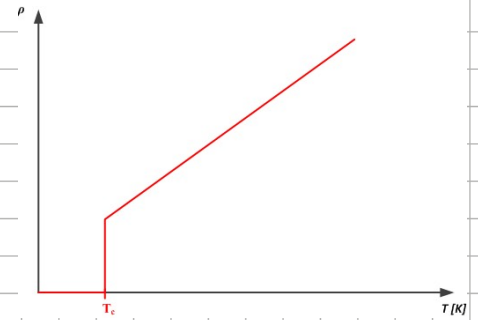
mit steigender Temperatur mehr bewegliche Ladungsträger aber das Gitter schwingt stärker und sie werden stärker behindert



Supraleitung

spezifischer Widerstand fällt unterhalb einer kritischen T_c quasi auf 0

↳ in der Regel sehr tief
→ kühlen mit flüssigem Helium



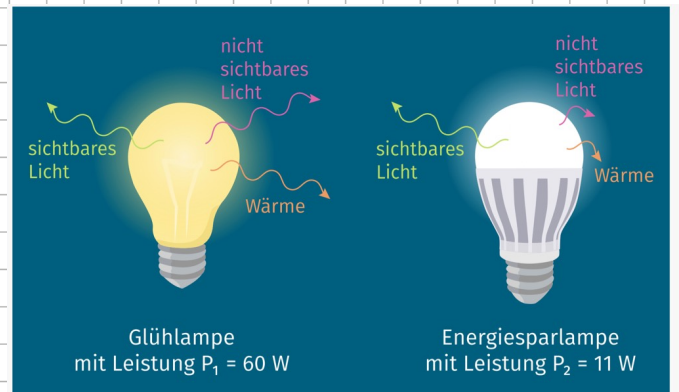
Energie und Leistung (Gleichstrom)

$$W = UQ \quad [W] = VAs = Ws = J$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \dot{W} \quad [P] = W$$

falls I konstant:

$$P = \frac{W}{t} = U \frac{Q}{t} = UI \quad P = UI$$



Brückenschlag zur Mechanik:

$$W_m = Fs = Fvt$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{W_m}{t} = Fv$$

$$\text{für Drehbewegung: } P_m = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \quad (\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F})$$

Zusammenfassung

Typ	Symbol	Einheit
Ladung	$q ; Q$	As; C
Strom	I	A
Spannung	U	V
Arbeit	W	J ; kWh; VAs
Leistung	P	W
Widerstand	R	Ω ; V/A
Leitwert	G	S ; A/V

Elektrische Bauelemente

Zweipol

Bauteil, das über genau 2 Klemmenpunkte nach außen zugänglich ist

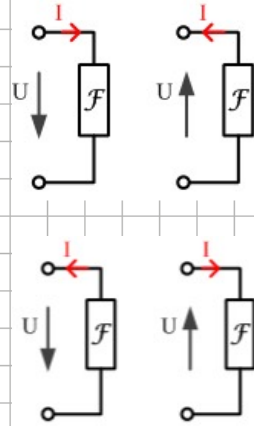
Zählpfeilsysteme

Verbraucher - Zählpfeilsystem

U und I in gleiche Richtung

Erzeuger (bzw. Generator) - Zählpfeilsystem

U und I in gegenläufige Richtung



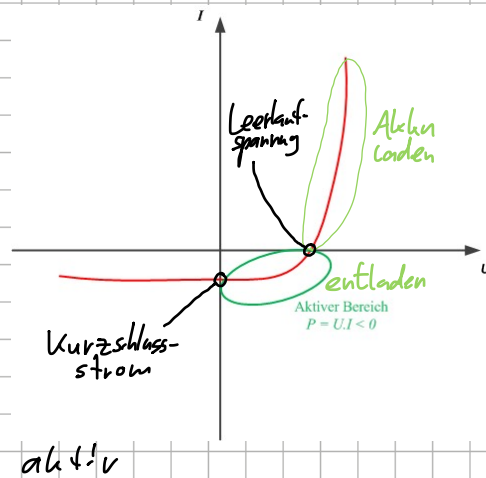
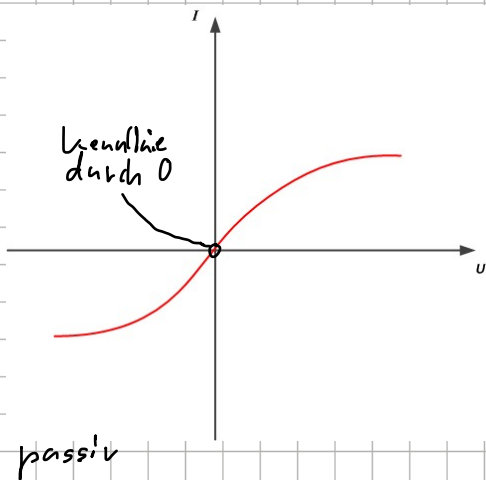
Klassifikation von Bauelementen (Zweipolen) durch ihre Kennlinie im Verbrauchersystem

↳ U & I gleiche Richtung

(i) Leistungsaufnahme

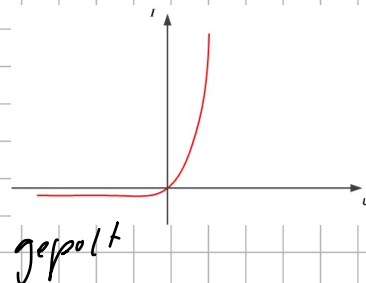
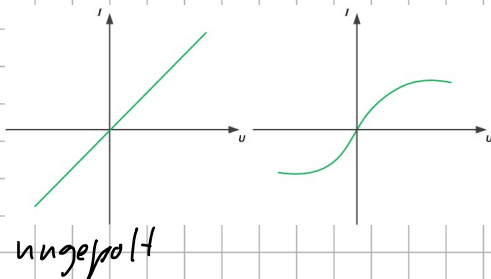
$$P = UI, \quad P < 0 \Rightarrow \text{Leistungsabgabe}$$

falls Punkte auf Kennlinie wo $P < 0 \Rightarrow$ aktives Bauelement, sonst **passiv**



(ii) Polung

falls Kennlinie punktsymmetrisch $\Rightarrow$ Bauteil **ungepolt**, sonst **gepolt**
ungepolt = egal wie rum, immer gleiche Funktionsweise



Passive elektrische Zweipole

→ am besten im Verbraucherzählpfeilsystem

lineare passive Zweipole - der Ohm'sche Widerstand
Gerade durch Nullpunkt

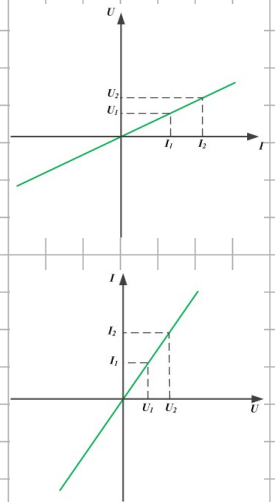
$$U = R I \Leftrightarrow R = \frac{U}{I} = \text{const.}$$

$$R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

$$I = G U \Leftrightarrow G = \frac{I}{U} = \text{const.}$$

$$G = \frac{I_1}{U_1} = \frac{I_2}{U_2} = \frac{\Delta I}{\Delta U}$$

ungepolt



nichtlineare passive Zweipole - 2 Bsp
Kurve durch Nullpunkt

(i) pn-Diode



Halbleiter-Element

$$I(U) = I_s \left(\exp\left(\frac{eU}{k_B T}\right) - 1 \right)$$

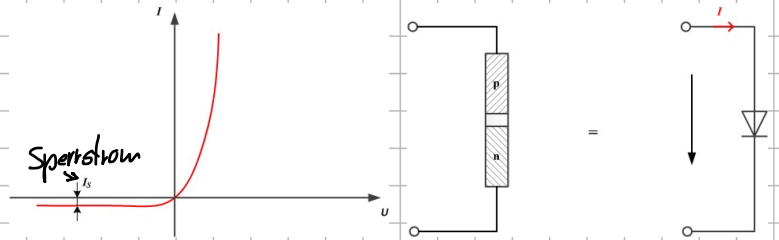
Widerstand stark spannungsabhängig

passiv, gepolt

Durchbruch: rückwärts gerichtete Spannung sehr hoch $\Rightarrow$ Strom steigt stark an

→ PN-Diode $\Rightarrow$ zerstört

→ Z-Diode $\Rightarrow$ Durchbruch reversibel
 $\hookrightarrow$ für Rückwärtsbetrieb konzipiert



pn-Diode

Zener-Diode

Durchbruch-
spannung



Zener-Diode

(ii) Tunnel-Diode

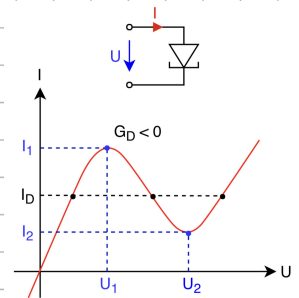


Spannungs-, aber nicht stromgesteuert:

U bekannt $\Rightarrow I$ eindeutig definiert, aber nicht umgekehrt

Einsatz für Oszillatoren und als Verstärker

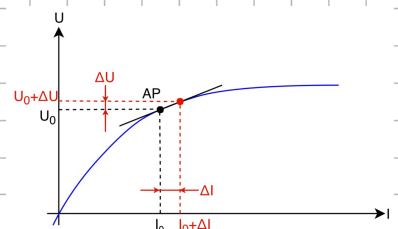
negativen differentieller Widerstand zwischen U_1 & U_2



Ausblick: Differentieller (dynamischer) Widerstand

→ Tangente an die Kurve
im Arbeitspunkt

$$r = \frac{dU}{dI} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

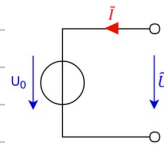
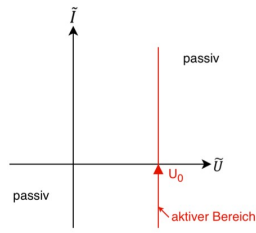


Aktive Zweipole

ideale Spannungsquelle

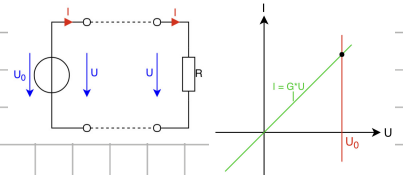
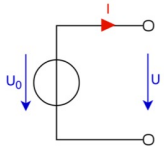
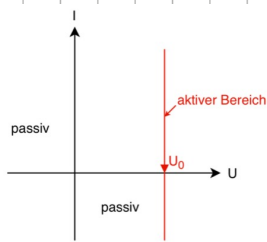
konstante Klemmenspannung

Verbrauchersystem:



Erzeugersystem:

↳ meist praktischer

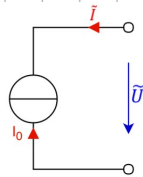
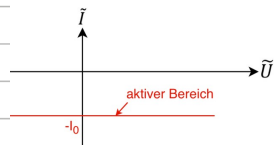


Arbeitspunkt der belasteten Quelle bestimmen

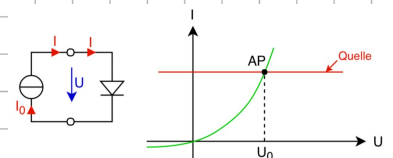
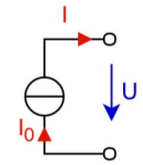
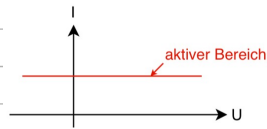
ideale Stromquelle

konstanten Quellenstrom

Verbrauchersystem



Erzeugersystem

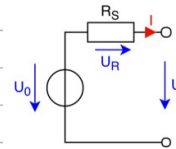
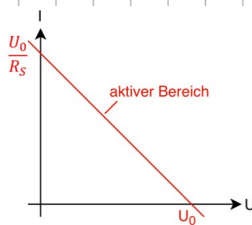
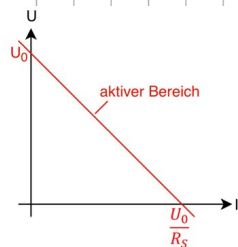


Arbeitspunkt der Quelle bestimmen

reale Spannungsquelle

$$U_0 = U_R + U = R_S I + U$$

$$\Rightarrow U = U_0 - R_S I$$

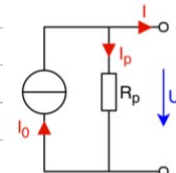
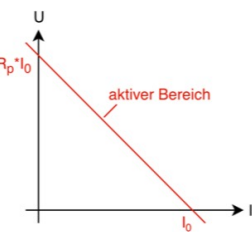
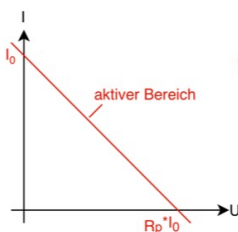


reale Stromquelle

$$I_0 = I_P + I = \frac{U}{R_P} + I$$

$$\Rightarrow I = I_0 - \frac{1}{R_P} U$$

$$= I_0 - G_P U$$



Äquivalenz der beiden Quellschaltungen

reale Spannungsquelle: $U = U_0 - R_S I$

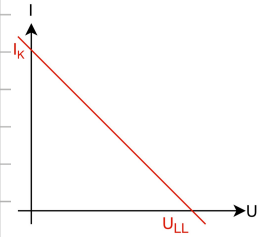
reale Stromquelle: $I = I_0 - G_P U \Leftrightarrow U = R_P I_0 - R_P I$

→ falls $U_0 = R_P I_0$ und $R_S = R_P \Rightarrow$ beide Quellen selbe Kennlinie
→ kann man von aussen nicht unterscheiden

aus realen Quelle ideale machen:

Spannungsquelle: $R_i \rightarrow 0$

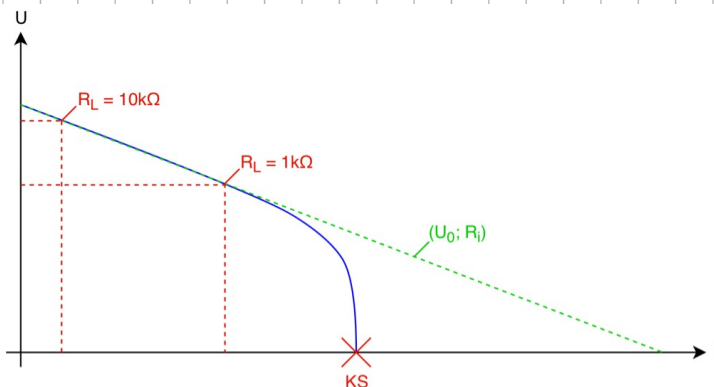
Stromquelle: $R_i \rightarrow \infty$



lineare Quelle durch U_{LL} und I_{KS} charakterisiert

in Praxis Messung dieser Größen nur bedingt möglich

- KS kann zu hohe Belastung der Bauelemente darstellen
- viele Schaltungen nur in gewissem Bereich linear, bei LL & KS typisch nicht



nicht-lineare Quelle, die sich in
kleinem Arbeitsbereich linear verhält

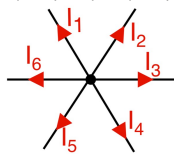
für Lastbereich $1 \text{ k}\Omega < R_L < 10 \text{ k}\Omega$
kann man dann schön den AP
berechnen, weil da ungefähr linear
→ mit KS völlig falsches Ergebnis

Gleichstrom-Netzwerke

Kirchhoff'sche Gesetze

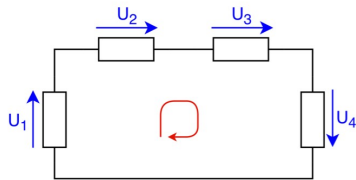
Knotensatz

$$\sum_k I_k = 0$$



Maschensatz

$$\sum_k U_k = 0$$



Serienschaltung von Widerständen

Ersatzwiderstand

$$U = \sum R_i I = (\sum R_i) I = \tilde{R} I$$

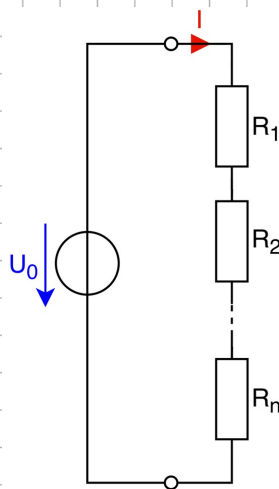
$$\Rightarrow \tilde{R} = \sum R_i$$

Spannungsteiler

$$\tilde{R} = \sum R_i \Rightarrow I = \frac{U_0}{\tilde{R}}$$

$$U_i = R_i I = \frac{R_i}{\tilde{R}} U_0$$

$$\Rightarrow \frac{U_i}{U_j} = \frac{R_i}{R_j}$$



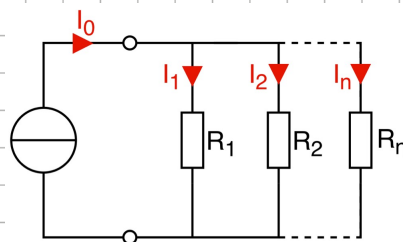
Parallelschaltung von Widerständen

Ersatzwiderstand

$$I = \sum G_i U = (\sum G_i) U = \tilde{G} U$$

$$\Rightarrow \tilde{G} = \sum G_i \Leftrightarrow \frac{1}{\tilde{R}} = \sum \frac{1}{R_i}$$

$$R_1 \parallel R_2 = \tilde{R} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Stromteiler

$$\tilde{G} = \sum G_i \Rightarrow U = \frac{I_0}{\tilde{G}}$$

$$I_i = G_i U = \frac{G_i}{\tilde{G}} I_0$$

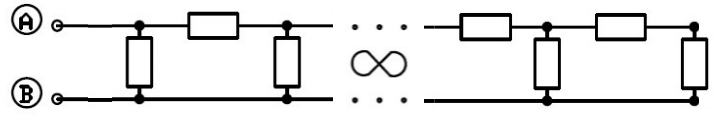
$$\Rightarrow \frac{I_i}{I_j} = \frac{G_i}{G_j} = \frac{R_j}{R_i}$$

Analyse einfacher Schaltungen mithilfe der Kirchhoff-Gleichungen

$$R\vec{I} = \vec{U}$$

Kettenbruchschaltung

$$\tilde{R}_{n+1} = \frac{(\tilde{R}_n + R)R}{(\tilde{R}_n + R) + R} = \frac{\tilde{R}_n R + R^2}{\tilde{R}_n + 2R}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{R}_n R + R^2}{\tilde{R}_n + 2R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n$$

$$\frac{R \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n + R^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n + 2R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n =: \tilde{R}$$

$$\Rightarrow R\tilde{R} + R^2 = \tilde{R}^2 + 2R\tilde{R}$$

$$0 = \tilde{R}^2 + R\tilde{R} - R^2$$

$$0 = \left(\tilde{R} + \frac{1}{2}R\right)^2 - \frac{1}{4}R^2 - R^2$$

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{2}R = \tilde{R} + \frac{1}{2}R$$

$$\tilde{R} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} R$$

$$\Rightarrow \tilde{R} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} R \approx 0.618 R$$

Alternativ:

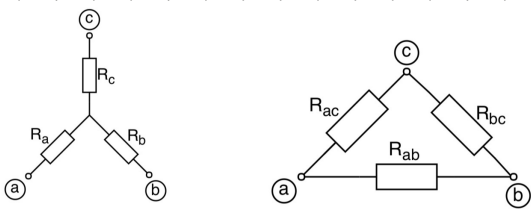
$$\tilde{R} = R \parallel (R + \tilde{R})$$

$$= \frac{\tilde{R}R + R^2}{\tilde{R} + 2R}$$

$$\Rightarrow \tilde{R}^2 + 2R\tilde{R} = R\tilde{R} + R^2$$

$$0 = \tilde{R}^2 + R\tilde{R} - R^2$$

Stern-Dreieck-Transformation



4.5.1 Umwandlung Stern → Dreieck

$$\tilde{R} = R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c$$

$$R_{ab} = \frac{\tilde{R}}{R_c}; \quad R_{ac} = \frac{\tilde{R}}{R_b}; \quad R_{bc} = \frac{\tilde{R}}{R_a}$$

Nimm $\tilde{R}$ und Teile durch den durch den Widerstand, der der gewünschte Kante gegenüber liegt

4.5.2 Umwandlung Dreieck → Stern

$$\hat{R} = R_{ab} + R_{ac} + R_{bc} \quad \text{Umlauf-Widerstand}$$

$$R_a = \frac{R_{ab} R_{ac}}{\hat{R}}; \quad R_b = \frac{R_{ab} R_{bc}}{\hat{R}}; \quad R_c = \frac{R_{ac} R_{bc}}{\hat{R}}$$

Nimm die am Knoten anliegenden Widerstände, multipliziere sie und teile durch $\hat{R}$

Quellenbehaftete Schaltungen

Leistung $P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$

$$P_L = R_L I^2 = R_L \left(\frac{U_0}{R_i + R_L} \right)^2$$

$$P_i = R_i I^2 = R_i \left(\frac{U_0}{R_i + R_L} \right)^2$$

$$P_{\text{tot}} = (R_L + R_i) \frac{U_0^2}{(R_i + R_L)^2} = \frac{U_0^2}{R_i + R_L}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_L \geq 0 \\ R_L = 0 \Rightarrow P_L = 0 \\ R_L \rightarrow \infty \Rightarrow P_L = 0 \end{array} \right\} P_L \text{ muss ein Maximum haben}$$

$$P_L(R_L) = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} U_0^2$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{(R_i + R_L)^2 - R_L 2(R_i + R_L)}{(R_i + R_L)^4} U_0^2 = \frac{R_i^2 - R_L^2}{(R_i + R_L)^4} = \frac{R_i - R_L}{(R_i + R_L)^3}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow R_L = R_i = R_m$$

bei R_m wird die in der Last umgesetzte Leistung Maximal $\rightarrow$ Leistungsanpassung

$$P_m = P_L(R_i) = \frac{R_i}{(R_i + R_i)^2} U_0^2 = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_L}{P_{\text{tot}}} = \frac{R_L}{R_i + R_L}$$

$$\eta = 0 \Rightarrow R_L = 0$$

$$\eta = 1 \Rightarrow R_L = \infty$$

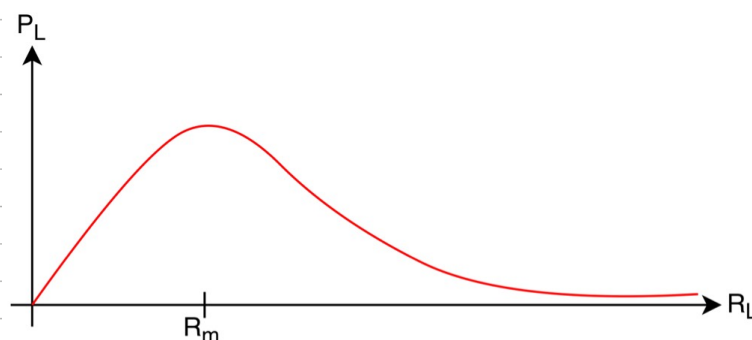
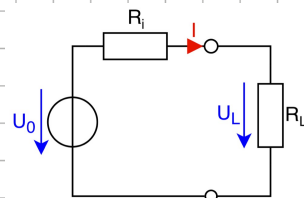
bei Leistungsanpassung $\eta = \frac{R_i}{R_i + R_i} = 1/2$

Leistungsanpassung ist erforderlich, wenn Quelle nur geringe Leistung abgeben kann, die möglichst umfassend genutzt werden soll

- Antennen
- Solarzellen
- bestimmte Sensoren

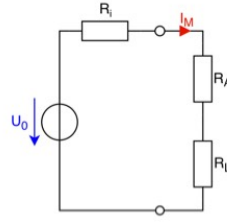
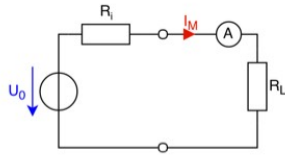
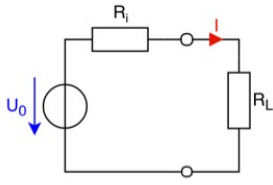
Oft soll jedoch der Wirkungsgrad möglichst hoch sein

- el. Maschinen
- Antriebe



Messung elektrischer Größen

Strommessung mit Amperemeter



$$I = \frac{U_0}{R_i + R_L}, \quad I_M = \frac{U_0}{R_i + R_L + R_A}$$

gemessene Strom zu klein

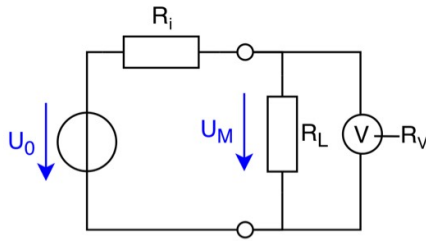
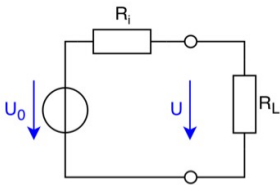
$$\Delta I = I_M - I$$

$$\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{R_A}{R_i + R_L + R_A}$$

- $|\delta I|$ steigt monoton mit $R_A \Rightarrow$ Ströme niedrigohmig messen
- $R_A = 0 \Rightarrow |\delta I| = 0\%$
- $R_A = \infty \Rightarrow |\delta I| = 100\%$

falls R_A bekannt $\Rightarrow$ nachträglich korrigieren (weil systematisch falsch)

Spannungsmessung mit Voltmeter



$$U = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_0, \quad U_M = \frac{R_L \parallel R_V}{R_i + R_L \parallel R_V} U_0 \quad \text{gemessene Spannung zu klein}$$

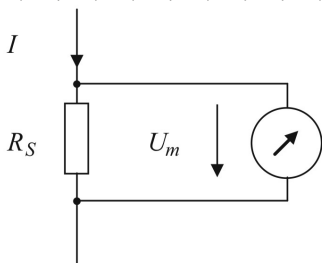
$$\Delta U = U_M - U$$

$$\delta U = \frac{\Delta U}{U} = - \frac{R_L \parallel R_i}{R_V + R_L \parallel R_i}$$

- $|\delta U|$ sinkt mit steigendem $R_V \Rightarrow$ Spannungen hochohmig messen

falls R_V bekannt $\Rightarrow$ nachträglich korrigieren (weil systematisch falsch)

Strommessung mit Shuntwiderständen

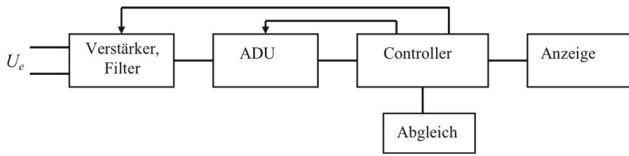


R_S = Shuntwiderstand

U_m = Spannungsabfall über R_S (untd. gemessen)

$$I = \frac{U_m}{R_S}$$

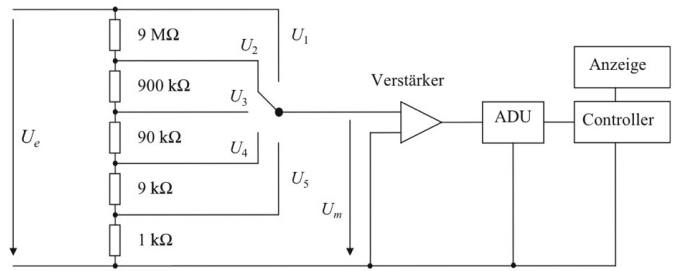
Digitale Strom- und Spannungsmessgeräte



Eingangssignal wird entkoppelt, gefiltert und an Eingangsspannungsbereich des ADU (Analog-Digital-Umsetzer) angepasst

ADU typischerweise 16- bis 24-bit Umsetzer

Ströme häufig mit Shunt-Widerständen gemessen



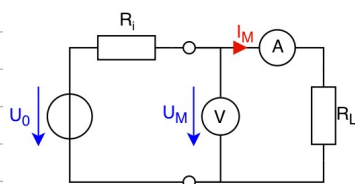
Messbereichsanpassung (Präzisionsteiler)

Präzisionsteiler wird verwendet, um gemessene Spannung möglichst gut an Eingangsspannungsbereich des ADU anzupassen

Simultane Messung von Strom und Spannung

oft möchte man bei einem Bauteil beides gleichzeitig messen, bspw um Widerstand oder dissipierte Leistung eines Bauteils zu bestimmen

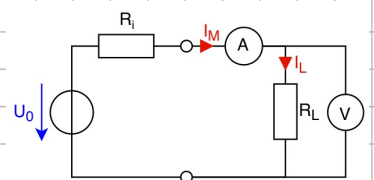
(i) stromrichtig



$$I_m = I_L$$

$$U_m = U_L + I_m R_A > U_L$$

(ii) spannungsrichtig



$$U_m = U_L$$

$$I_m = I_L + \frac{U_m}{R_V} > I_L$$

Widerstand bestimmen

$$R_m = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_L}{I_m} + R_A = R_L + R_A > R_L$$

$$\Rightarrow \Delta R = R_A \text{ konstant}$$

$$\Rightarrow \delta R = \frac{\Delta R}{R_L} = \frac{R_A}{R_L}$$

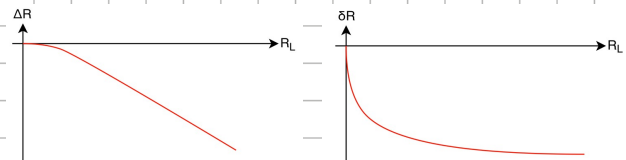
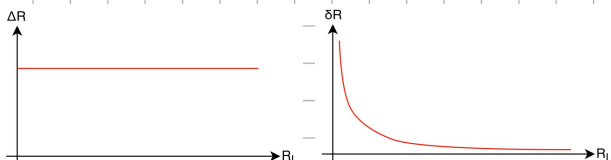
↳ für hohe R_L klein

$$R_m = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_L}{I_L + \frac{U_m}{R_V}} = \frac{R_L R_V}{R_V + R_L} = R_L \parallel R_V < R_L$$

$$\Rightarrow \Delta R = -\frac{R_L^2}{R_L + R_V} \text{ beliebig gross}$$

$$\Rightarrow \delta R = \frac{\Delta R}{R_L} = -\frac{R_L}{R_L + R_V}$$

↳ für kleine R_L klein



Messverfahren wechseln, wenn relative Fehler betragsmässig gleich:

$$|\delta R_1| \stackrel{!}{=} |\delta R_2| \Rightarrow \frac{R_L}{R_L + R_V} = \frac{R_A}{R_L} \Rightarrow 0 = R_L^2 - R_A R_L - R_A R_V$$

$$\Rightarrow R_L = \frac{R_A \pm \sqrt{R_A^2 + 4 R_A R_V}}{2}$$

$$R_L > 0 \Rightarrow R_L = \frac{1}{2} (R_A + \sqrt{R_A^2 + 4 R_A R_V})$$

für $R_V \gg R_A$:

$$R_L \approx \sqrt{R_A R_V} \begin{cases} R_L > \sqrt{R_A R_V} \Rightarrow \text{stromrichtig} \\ R_L < \sqrt{R_A R_V} \Rightarrow \text{spannungsrichtig} \end{cases}$$

Leistung bestimmen

$$P_m = U_m I_m = R_L I_L^2 + R_A I_L^2$$

$$\Rightarrow \Delta P = R_A I_L^2$$

$$\Rightarrow \delta P = \frac{R_A}{R_L}$$

$$P_m = U_m I_m = U_L^2 \frac{R_L + R_V}{R_L R_V}$$

$$\Rightarrow \Delta P = \frac{U_L^2}{R_V}$$

$$\Rightarrow \delta P = \frac{R_L}{R_V}$$

Messverfahren wechseln, wenn relative Fehler betragsmässig gleich:

$$|\delta P_1| \stackrel{!}{=} |\delta P_2| \Rightarrow \frac{R_A}{R_L} = \frac{R_L}{R_V} \Rightarrow R_L = \sqrt{R_A R_V}$$

$$R_L = \sqrt{R_A R_V} \begin{cases} R_L > \sqrt{R_A R_V} \Rightarrow \text{stromrichtig} \\ R_L < \sqrt{R_A R_V} \Rightarrow \text{spannungsrichtig} \end{cases}$$

Lineare Netzwerke

Motivation

lineares Netzwerk: beliebige Verschaltung von Zweipolen, bei denen jeder für sich eine lineare U-I-Kennlinie hat
→ besteht aus

- Ohm'schen Widerständen
- Idealen Quellen



Gründe:

- praktische Eigenschaften (→ Schaltungsanalyse)
- manchmal kann man ein Netzwerk mit nicht-linearen Bauelementen in einen linearen und einen nicht-linearen Teil zerlegen

Superpositionsprinzip (Überlagerungssatz)

in linearen, eindeutig lösbareren Netzwerken setzt sich jede (Teil-)Spannung und jeder (Teil-)Strom aus der Summe der Reaktionen auf die einzelnen unabhängigen Quellen zusammen

→ Folge der Linearität

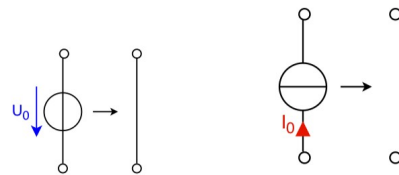
resultierende Ströme und Spannungen berechnen:

Schaltung für jede Quelle einzeln analysieren (andere Quellen auf 0 setzen) und dann Teilergebnisse addieren

Nullquelle:

Spannungsquelle → Kurzschluss ($U=0$)

Stromquelle → Leerlauf ($I=0$)



(a) Kurzschluss ($U=0$)

(b) Leerlauf ($I=0$)

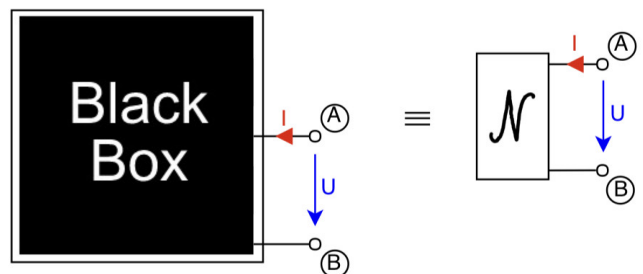
Zweipol-Ersatzschaltung

Voraussetzung:

es liegt beliebige lineare Schaltung vor, die über genau 1 Klemmenpaar nach außen zugänglich ist

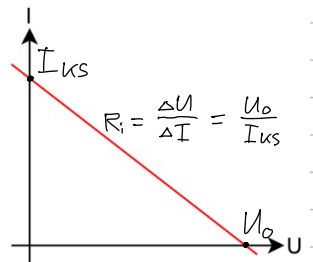
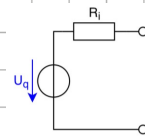
Ziel:

über Klemmenpaar (A), (B) in Schaltung hineinschauen und U-I-Kennlinie bestimmen

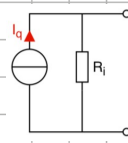


Theoreme:

- Thévenin: elektrische Verhalten entspricht realen Spannungsquelle mit (unbekannten) Parametern ($U_0; R_i$)



- Norton: elektrische Verhalten entspricht realen Stromquelle mit (unbekannten) Parametern ($I_0; R_i$)



beide Theoreme sind äquivalent und folgen aus Superpositionsprinzip
zentrale Aussage: lineare U-I-Kennlinie

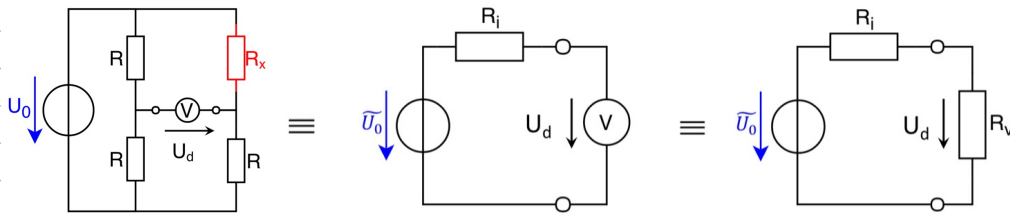
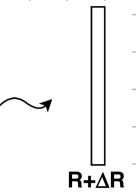
Weg 1: U_0 & I_{KS} bestimmen

Weg 2: U_0 & R_i bestimmen

Weg 3: Quellenwandlung: R_i bleibt gleich, $U_0 = R_i I_0$ resp $I_0 = \frac{U_0}{R_i}$

Wheatstone - Messbrücken

Ziel: Widerstandsänderungen detektieren $\rightarrow$ Sensoren, z.B. DMS



$$\tilde{U}_0 = U_2 - U_4 = U_0 \frac{R}{2R} - U_0 \frac{R}{R+R_x} = \frac{U_0}{2} \frac{R_x - R}{R_x + R} = \frac{U_0}{2} \frac{\Delta R}{2R + \Delta R} = \frac{U_0}{2} \frac{\delta R}{2 + \delta R}, \quad -\frac{U_0}{2} \leq \tilde{U}_0 \leq \frac{U_0}{2}$$

$$R_i = R \parallel R_x + R \parallel R = (R \parallel R + \Delta R) + (R \parallel R) = R \left(\frac{1 + \frac{3}{2} \delta R}{1 + \frac{1}{2} \delta R} \right)$$

$$U_d = \tilde{U}_0 - U_{R_i} = \tilde{U}_0 - R_i \cdot I = \tilde{U}_0 - R_i \cdot \frac{\tilde{U}_0}{R_i + R_v} = \tilde{U}_0 \left(\frac{R_i + R_v - R_i}{R_i + R_v} \right) = \tilde{U}_0 \frac{R_v}{R_i + R_v} = \frac{U_0}{2} \frac{\delta R}{2 + \delta R} \frac{R_v}{R_i + R_v}$$

für $|\delta R| < 10\% \Rightarrow R_i \approx R = \text{const.}$

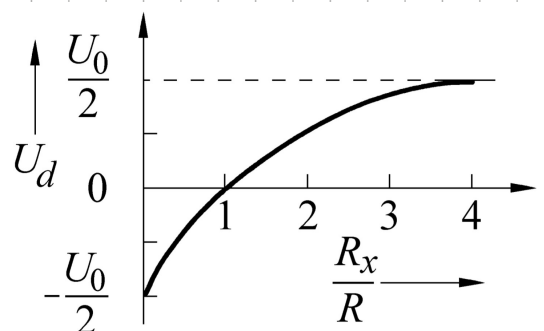
$$\Rightarrow U_d = \tilde{U}_0 \frac{R_v}{R_i + R_v} = \frac{U_0}{2} \frac{\delta R}{2 + \delta R} \frac{R_v}{R + R_v}$$

da Voltmeter hochohmig $\Rightarrow R_v \gg R$

$$\Rightarrow U_d \approx \tilde{U}_0 = \frac{U_0}{2} \frac{R_x - R}{R_x + R} = \frac{U_0}{2} \frac{\frac{R_x}{R} - 1}{\frac{R_x}{R} + 1} = \frac{U_0}{2} \frac{\Delta R}{2R + \Delta R}$$

falls ΔR klein (bei 0V) gilt näherungsweise:

$$U_d \approx \frac{U_0}{2} \frac{R_x - R}{2R} = \frac{U_0}{4} \left(\frac{R_x}{R} - 1 \right) = \frac{U_0}{4} \frac{\Delta R}{R}$$



alternative Ausführungen der Wheatstone-Brücke

oft hilfreich Zahl d. Sensoren zu erhöhen,
da mit Anzahl Sensoren die
Empfindlichkeit steigt

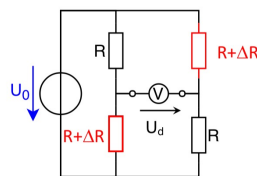


Abbildung 169: Halbbrücke.

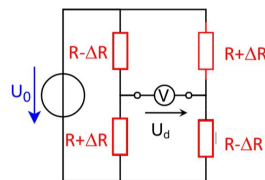


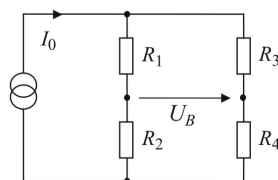
Abbildung 170: Vollbrücke.

stromgespeiste Messbrücken

$$U_0 = I_0 (R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4) = I_0 \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

$$U_B = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

manchmal vorteilhaft $\rightarrow$ bei Halbbrücke linearer
Zusammenhang zw. U_B & ΔR



Analyse einfacher nicht-lineare Schaltungen - stückweise lineare Kennlinie

gesucht: Spannung über R_L als Funktion von R_L , $R_L \in [R_{L,min}, \infty)$

Schritt 1: Ersatzschaltbild

$$U_{LL} = \frac{R_L}{R_L + R_v} U_0 = U_{LL}(R_L)$$

$$U_{LL,min} = U_{LL}(R_{L,min})$$

$$U_{LL,max} = U_{LL}(\infty)$$

$$I_{KS} = \frac{U_0}{R_v} = \text{const.}$$

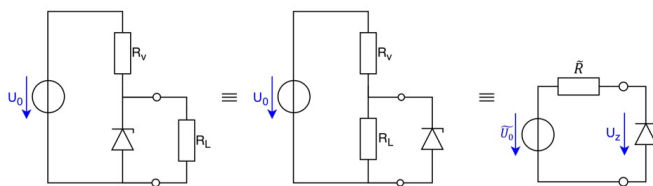


Abbildung 172: Nicht-lineare Beispielschaltung

Schritt 2: Kennlinienfeld der Quelle und der Diode

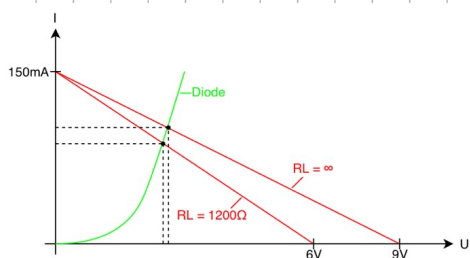


Abbildung 173: Skizze zur graphischen Ermittlung des Arbeitspunktes

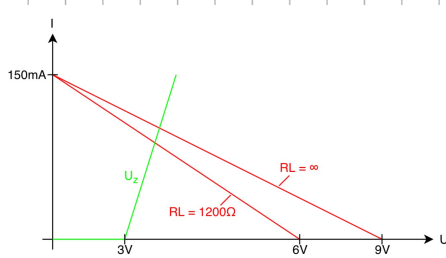


Abbildung 174: Schaltung mit stückweise linearer Kennlinie

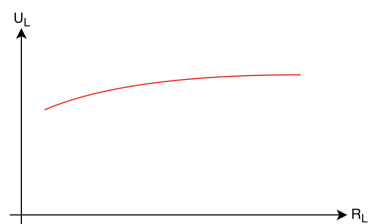


Abbildung 175: Lastspannung als Funktion des Lastwiderstands

allgemeine Analyseverfahren

normalerweise 2 Schritte:

- (i) Beschreibung Schaltungstopologie (Verbindungsstruktur)
- (ii) Beschreibung Bauelemente

Photodioden, Solarzellen, LED

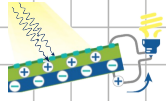
photoelektrischer Effekt



Photon kann ein Elektron aus der Bindung zu einem Atom lösen, wenn es genügend Energie hat



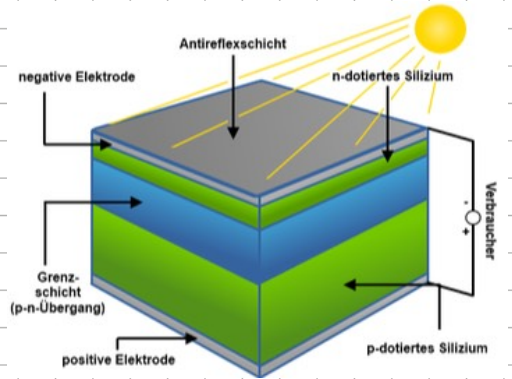
photovoltaische Effekt



bei Halbleitern mit Raumladungszone (pn-Übergang) kann beim Eintreffen eines Photons ein Elektron-Loch-Paar entstehen

wegen Raumladung driften Elektronen in ins n-dotierte Material und Löcher ins p-dotierte, wodurch zwischen p- und n-Anschluss eine Spannung entsteht

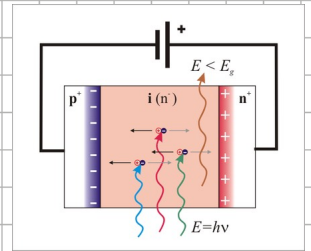
es wird somit Licht in el. E. umgewandelt



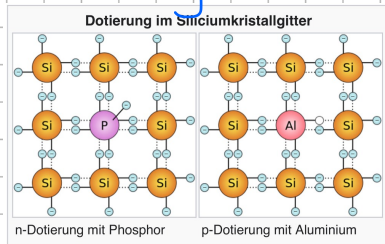
Photodiode



Bauteil, das photovoltaischen Effekt ausnutzt



Dotierung



Einführen von Fremdatomen in einen Halbleiterkristall

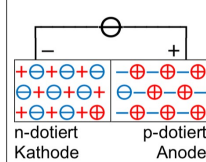
→ elektrische, optische, strukturelle Eigenschaften werden geändert

In der nachstehenden Tabelle wird der Effekt an einem Halbleiter-Modell erklärt.

In untenstehender Tabelle verwendete Symbole	Negativ geladen	Positiv geladen
Bewegliche Ladungsträger	$\ominus$ = Elektron	$\oplus$ = Loch
Im Kristallgitter verankerte (festsitzende) Atomrümpfe	—	+

Situation	Halbleiter-Modell	Interpretation
Je ein n-dotierter und p-dotierter Halbleiter-Kristall, die sich nicht berühren	 n-dotiert p-dotiert	Die beweglichen Ladungsträger sind gleichmässig verteilt. Somit sind beide Kristalle elektrisch überall neutral.
Die n- und p-dotierten Gebiete sind im selben Halbleiter-Kristall	 n-dotiert Kathode p-dotiert Anode	Bewegliche Elektronen im n-Material werden von festsitzenden negativen Atomrümpfen im p-Material abgestossen. Analog ist es für Löcher im n-Material. Die Mitte ist nun ohne bewegliche Ladungsträger. Sie wird darum Sperrschicht genannt. Festsitzende geladene Atomrümpfe bewirken ein elektrisch nicht neutrales Gebiet in der Sperrschicht. Sie wird darum auch Raumladungszone genannt.
Eine Spannung wird angelegt: + an n-Seite — an p-Seite	 n-dotiert Kathode p-dotiert Anode	Die extern angelegte Spannung zieht die beweglichen Ladungsträger von der Raumladungszone weg, diese wird breiter. Ohne bewegliche Ladungsträger kann kein Strom fließen, der pn-Übergang sperrt. Die Diode ist in Sperrrichtung gepolt.

Die Spannung wird umgepolt:
— an n-Seite
+ an p-Seite

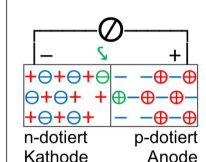


Die externe Spannung stösst die beweglichen Ladungsträger in die Raumladungszone hinein. Bei genügend hoher Spannung wandern die beweglichen Ladungsträger bis ins andere Gebiet.

Trifft ein Elektron auf ein Loch, rekombinieren diese und es gibt Platz für nachfolgende Ladungsträger: Strom fließt.

Die Diode ist in Durchlassrichtung gepolt. Bei der Rekombination wird Energie frei. **Leuchtdioden** strahlen dabei ein Photon ab, normale Dioden erwärmen sich.

Ein Photon trifft auf den Halbleiter



Ein Photon kann seine Energie an ein Elektron abgeben, welches aufgrund seiner nun höheren kinetischen Energie den Platz im Kristall verlassen und ein Loch hinterlassen kann.

Wegen der Raumladung, verursacht durch die festsitzenden Atomrümpfe, wandert das Elektron zur Kathode und das Loch zur Anode. Das Elektron kann über das extern mit Drähten angeschlossene Messinstrument zur Anode fließen, wo es mit einem Loch rekombiniert.

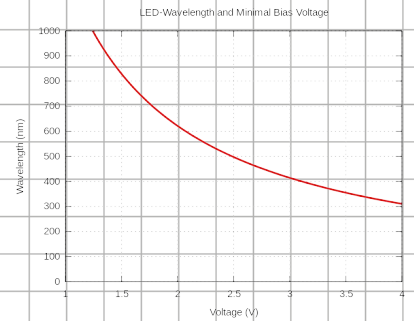
Der Strom ist proportional zur Anzahl Photonen. Der **photovoltaische Effekt** wird bei **Photodioden** und **Solarzellen** genutzt.

einfarbige LED

Farbe hängt von Bandlücke des Halbleiters ab

gibt Zusammenhang zwischen Lichtfarbe (= Photonen-Energie) und minimal nötigen Spannung

je nach Halbleiter ist Durchlassspannung verschieden



weiße LED

RGB-LED

Mischlicht wird als weißes Licht wahrgenommen

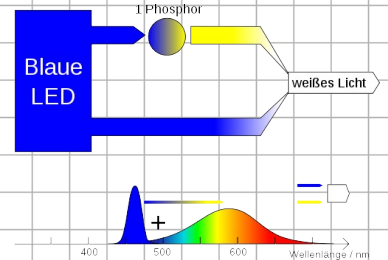
Vorteil: alle RGB-Farben durch Anpassen der Ströme



blaue LED mit Phosphor

ein Teil des Lichts wird durch Phosphor absorbiert und als gelbes Licht wieder abgestrahlt

über Dicke d. Phosphorschicht kann Lichttemperatur angepasst werden



Infrarot-LED

für Datenkommunikation: Lichtwellenlängen haben bei Infrarot geringste Dispersionsverluste

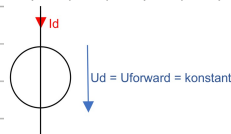
Lineare Ersatzschaltungen

je nach benötigter Genauigkeit kann Exp.-F. durch lin. Ersatzsch. angenähert werden

ungefähr: Durchlassspannung konstant

→ ideale Spannungsquelle:

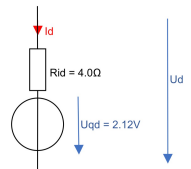
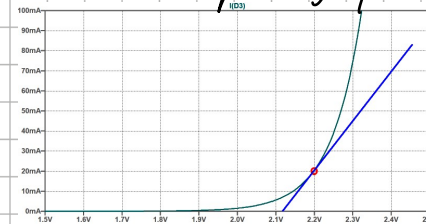
Forward Voltage (Durchlassspannung)



falls erwartete Strom stark vom Strom (Forward current) der Durchlassspannung abweicht
→ Spannung aus Kennlinie grafisch ablesen

genauer: nicht konstant

→ lineare Spannungsquelle:



$U_{qd} = x$ -Achsenabschn.

$R_{id} = \text{Steigung } \frac{\Delta U}{\Delta I}$

allgemeine Analyseverfahren

normalerweise 2 Schritte:

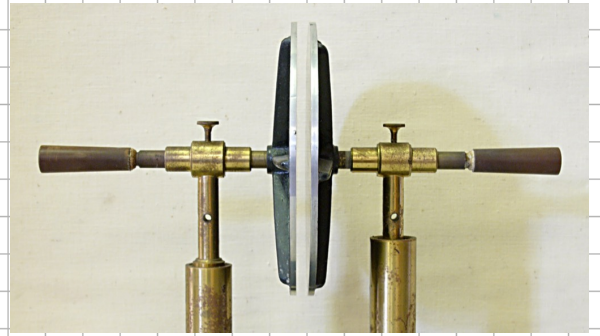
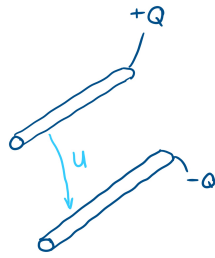
- Beschreibung Schaltungstopologie (Verbindungsstruktur)
- Beschreibung Bauelemente

Kondensator und Kapazität

Kapazität

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$[C] = F = \frac{As}{V}$$



Kondensator

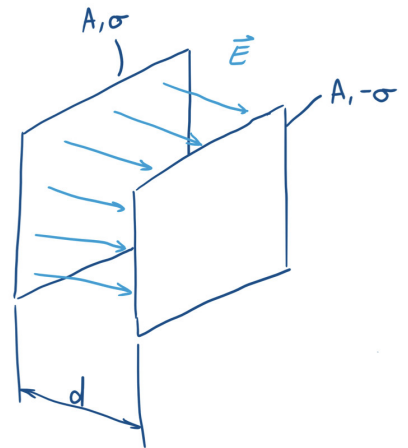
Anordnung von 2 isolierten Leitern, welche entgegengesetzt gleich grosse Ladungen tragen

Beschränkung auf Plattenkondensator $\rightarrow \vec{E}$ -Feld homogen

$$E = \frac{Q}{A\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$U = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$



gespeicherte elektrische Energie

$$dW = U dQ$$

$$dW = \frac{Q}{C} dQ$$

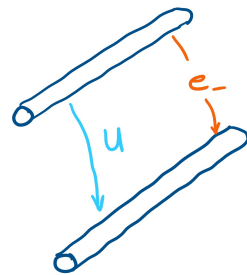
$$W = \int_0^{Q_0} \frac{1}{C} Q dQ = \frac{1}{2C} Q^2 \Big|_0^{Q_0} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Strom $\propto$ Spannungsänderung

E_{el} verlustlos gespeichert

$$\left[\begin{array}{l} i(t) = \frac{1}{R} \cdot u(t) \\ \text{Strom jederzeit} \propto \text{Spannung} \\ E_{el} \rightarrow \text{Wärme} \end{array} \right]$$

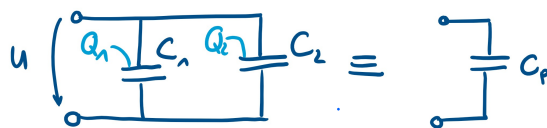


Verhaltung von Kondensatoren

parallel

$$Q = \sum C_i U = (\sum C_i) U = C_p U$$

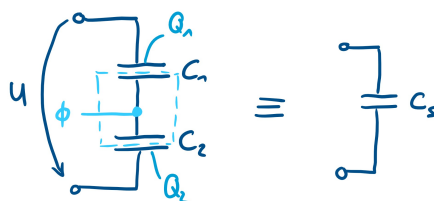
$$\Rightarrow C_p = \sum C_i$$



seriell

$$U = \sum \frac{Q}{C_i} = Q \left(\sum \frac{1}{C_i} \right) = \frac{Q}{C_s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_s} = \sum \frac{1}{C_i}$$



Kondensatoren und Dielektrika

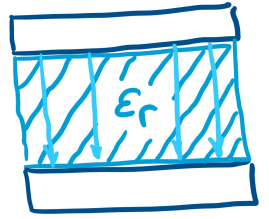
Permittivität ϵ_r gibt an, um welchen Faktor sich elektrische Feldstärke im Kondensator nach Einbringen des Dielektrikums reduziert
 $\hookrightarrow$ Isolator

für die meisten Dielektrika $1 < \epsilon_r < 100$

für Luft $\epsilon_r \approx 1 \Rightarrow$ unsere Überlegungen weiterhin gültig

ϵ_r ist Materialeigenschaft

ϵ_r ist frequenzabhängig



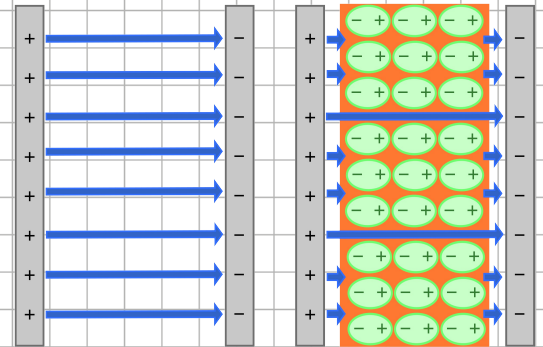
$$\tilde{U} = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

$$\tilde{C} = \frac{Q}{\tilde{U}} = \frac{Q}{U_0} \epsilon_r$$

$$\tilde{C} = \epsilon_r C_0$$

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

$\rightarrow$ Kapazität wird erhöht



weitere Zusammenhänge

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Leftrightarrow c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$$

Ausbreitungsgeschw. E-M-Welle

$$\text{Vakuum } v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

$$\text{Leiter } v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$: Permittivität

μ_0 : magnetische Feldkonstante

$\mu = \mu_0 \mu_r$: magnetische Permeabilität

Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

bei transparenten Materialien: $\mu_r \approx 1$

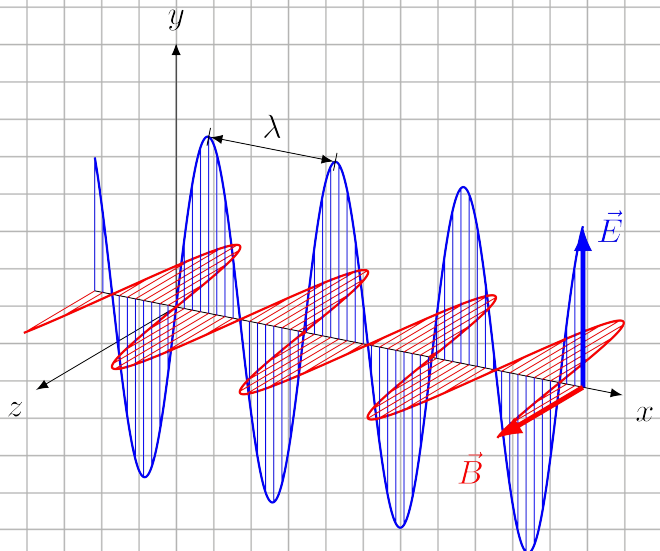
$$\Rightarrow n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

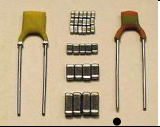
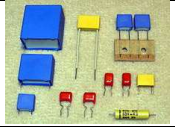
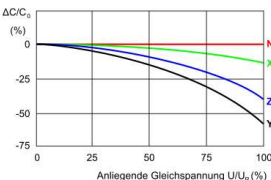
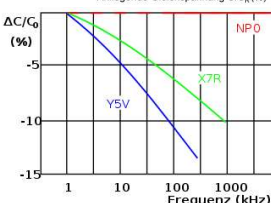
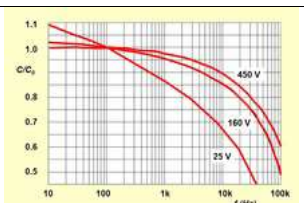
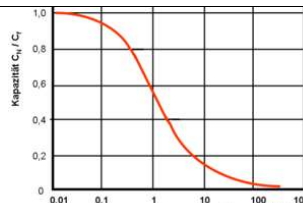
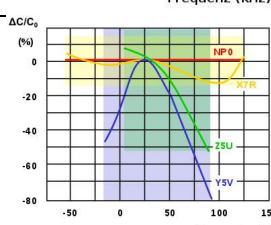
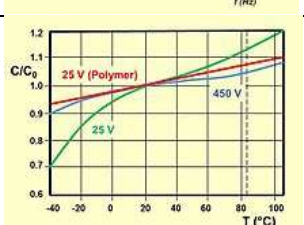
Maxwell-Gleichungen:

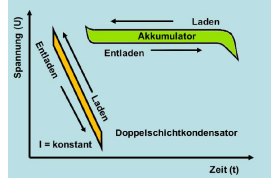
Name	Differential form	Integral form
Gauss's law	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q(V)}{\epsilon_0}$
Gauss's law for magnetism	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
Maxwell-Faraday equation (Faraday's law of induction)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t}$
Ampère's circuital law (with Maxwell's correction)	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}$

Dieses gekoppelte System von partiellen Differentialgleichungen beschreibt die zeitliche Entwicklung von elektromagnetischen Feldern im Raum. Die Maxwell-Gleichungen gehören zu den grundlegendsten und wichtigsten Gleichungen in der Physik.

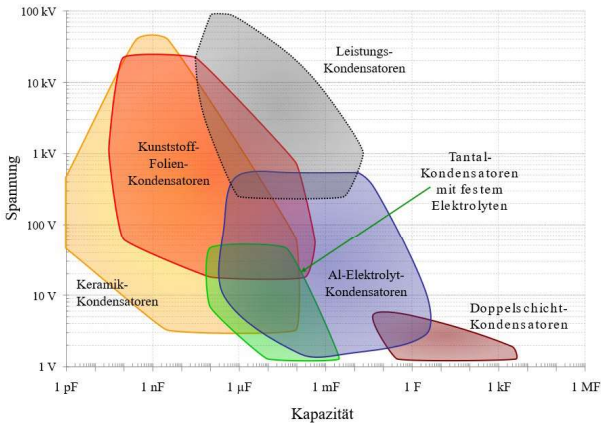


reale Kondensatoren

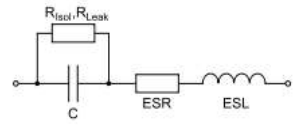
Kondensatoren	Keramik-Kondensator			Elektrolyt-K.	Super-K.	Folien-K.
Dielektrikum	NP0/COG	X7R	Y5V	Aluminiumoxid	Doppelschicht-K.	Kunststoffolie
Bauform						
Toleranz	±1% - ±10%	±20%		±20%	±20%	±1% - ±10%
Kapazität	1pF - 1µF	< 10µF	< 100µF	1µF - 10'000µF	0.1F - 10'000F	100pF - 10µF
Nennspannung	10V - 500V			4V - 630V	2.5V (bis 160V als Modul)	20V - 1000V
Strombelastbarkeit	Hoch, ist nicht der begrenzende Faktor			1A bei festem Elektrolyt = wichtiges Kriterium	Gering verglichen mit Elko Hoch verglichen mit Akku	Sehr hoch, hohe Impulsfestigkeit
Spannungsabhängigkeit				Gering verglichen mit der Herstellertoleranz		gering
Frequenzabhängigkeit						gering
Temperaturabhängigkeit					Gering verglichen mit der Herstellertoleranz	vernachlässigbar

Kondensatoren	Keramik-Kondensator			Elektrolyt-K.	Super-K.	Folien-K.
ESR = equivalent series resistor	Sehr klein, meist vernachlässigbar			50mΩ = wichtiges Kriterium	1mΩ - 10mΩ	1Ω
Selbstentladung	Vernachlässigbar, da mehrere GΩ			Hoch, im µA-Bereich	Über Wochen	Vernachlässigbar, GΩ
Preis bei 1000 St.	CHF 0.01 1nF/50Vdc	CHF 0.01 100nF/50Vdc	CHF 0.01 10µF/50Vdc	CHF 0.30 1000µF/10Vdc	CHF 5.00 1F/5Vdc	10.00 10µF/400Vac CHF 0.10 1nF/50Vdc
	Frequenzgang-Filter Hochfrequenz	Block-C DC-Entkopplung Filter mit geringen Ansprüchen	Stütz-C	Stütz-Kondensatoren DC-Entkopplung Überbrücken Stromausfall bis 1s	 Wirkungsgrad: Elko 99%, Super-C 95%, Akku 90%	Hohe Spannungen Hohe Stromspitzen Frequenzgang-Filter Hochfrequenz

Kapazitäts- und Spannungsbereiche verschiedener Kondensator-Technologien



Ersatzschaltbild eines Kondensators



Symbol

PID

Reglergleichung

$$y(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

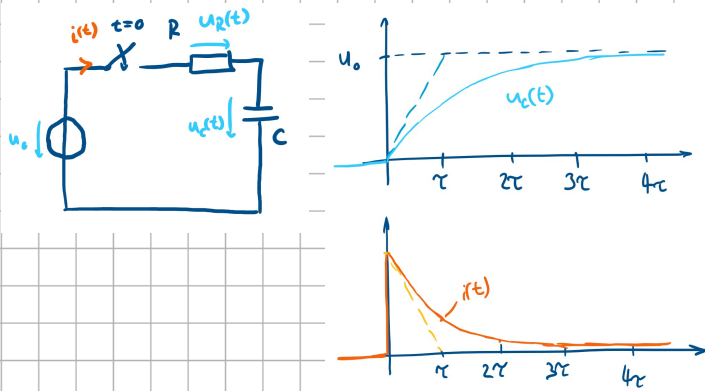
Sprungantwort

Elektrische Schaltung:

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_d}{C_i}$$
$$K_i = \frac{1}{R_1 \cdot C_i}$$
$$K_d = R_2 \cdot C_d$$

Schaltverhalten Kondensator

Laden Kondensator



$$u_q(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

$$q(t) = C \cdot u_C(t)$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = C \cdot \dot{u}_C(t)$$

$$\Rightarrow C \cdot \dot{u}_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{U_0 - u_C(t)}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{u}_C(t) = -\frac{1}{RC} u_C(t) + \frac{U_0}{RC}$$

homogen:

$$\dot{u}_C(t) = -\frac{1}{RC} u_C(t)$$

$$\Rightarrow u_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

inhomogen:

$$u_C(t) = k(t) e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow \dot{u}_C(t) = \dot{k}(t) e^{-\frac{t}{RC}} + k(t) \cdot \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

einsetzen:

$$\dot{k}(t) e^{-\frac{t}{RC}} + k(t) \cdot \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{1}{RC} k(t) e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{U_0}{RC}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{U_0}{RC} e^{\frac{t}{RC}}$$

$$k(t) = \int \dot{k}(t) = U_0 e^{\frac{t}{RC}} + \hat{C}$$

$$\Rightarrow u_C(t) = \left(U_0 e^{\frac{t}{RC}} + \hat{C} \right) e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 + \hat{C} e^{-\frac{t}{RC}}$$

mit $u_C(t) = 0$ für $t=0$:

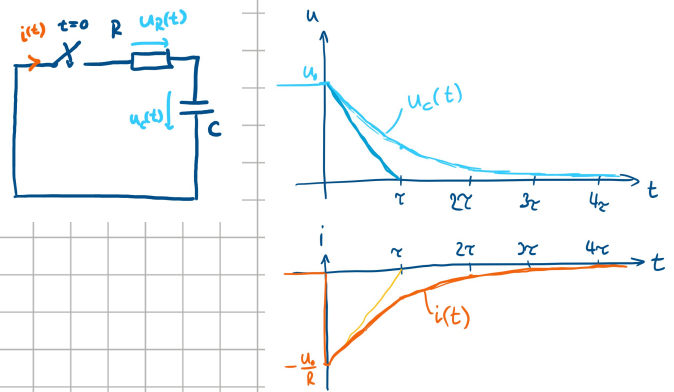
$$u_C(0) = 0 = U_0 + \hat{C} \cdot 1 \Rightarrow \hat{C} = -U_0$$

$$\Rightarrow u_C(t) = U_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$q(t) = C u_C(t) = C U_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i(t) = \dot{q}(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Entladen Kondensator



$$u_R(t) = -u_C(t)$$

$$q_C(t) = C u_C(t)$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = C \dot{u}_C(t)$$

$$\Rightarrow C \cdot \dot{u}_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{-u_C(t)}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{u}_C(t) = -\frac{1}{RC} u_C(t)$$

$$\Rightarrow u_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

mit $u_C(t) = U_0$ für $t=0$:

$$u_C(0) = U_0 = K \cdot 1 \Rightarrow K = U_0$$

$$\Rightarrow u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) = C u_C(t) = C U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \dot{q}(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Praxis: Vorgang nach 5τ fertig

$$\tau = RC$$

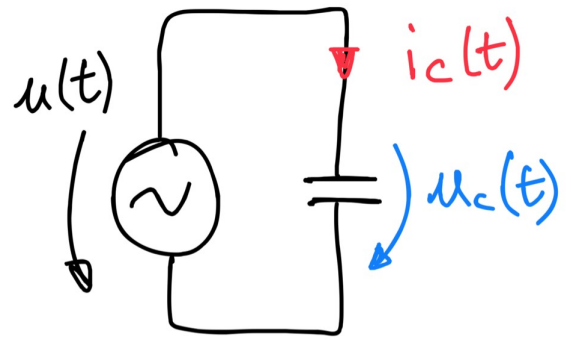
Kondensator bei sinusförmiger Anregung

Basisteilgleichung Kondensator

$$q(t) = C \cdot u(t) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} [C \cdot u(t)]$$

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u(t) \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{gilt } \forall u(t), i(t) \\ \rightarrow \text{gleicher Stellenwert wie } U = R \cdot I \end{array}$$



Kreisfrequenz ω

$$f = \frac{1}{T}$$

$$[f] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$[\omega] = \text{Hz}$$

Amplitude

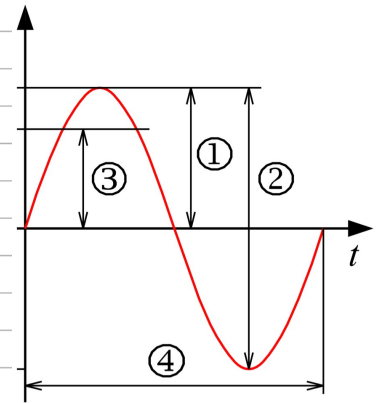
$\hat{A}$ = Amplitude = Scheitelwert = Spitzenwert ①

Effektivwert A_{RMS}

quadratisches Mittel

bei $\sin, \cos$: $A_{\text{RMS}} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$ ③

Spitzen-Spitzenwert ②



Kondensator an sinusf. Wechselstrom

$$u_c(t) = u(t) = \hat{U} \cos(\omega t)$$

$$i_c(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_c(t)$$

$$\Rightarrow i_c(t) = C \cdot \frac{d}{dt} [\hat{U} \cos(\omega t)]$$

$$\Leftrightarrow i_c(t) = \hat{U} \omega C \cdot (-\sin(\omega t))$$

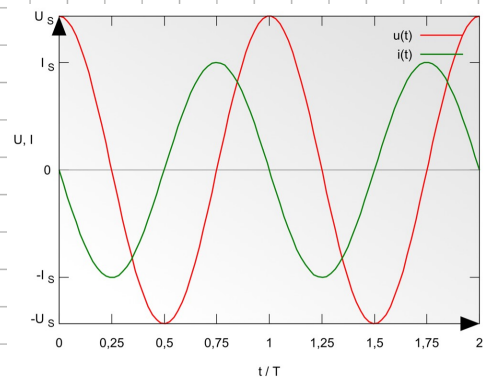
$$\Leftrightarrow i_c(t) = \hat{U} \omega C \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$i_c(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\hat{I} = \hat{U} \omega C \quad [\hat{I}] = \text{V Hz} \frac{\text{C}}{\text{V}} = \frac{\text{VA s}}{\text{s V}} = \text{A}$$

- $\propto \hat{U}$: höhere Spannung $\Rightarrow$ höherer Strom
- $\propto C$: größerer Kondi. $\Rightarrow$ höherer Strom
- $\propto \omega$: höhere Frequenz $\Rightarrow$ höherer Strom

$$f=0 \text{ (DC)} \Rightarrow \hat{I}=0, \quad f \rightarrow \infty \Rightarrow \text{KS}$$



Kondensator- Strom eilt vor.

Induktivität- Strom zu spät.

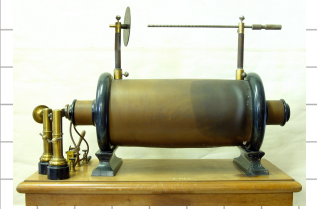
Induktion und Selbstinduktion

Grösse	Formelzeichen, Formel	Einheit bzw. Wert
Magnetische Flussdichte	B	$\text{Vs/m}^2 = \text{Tesla} = \text{T}$
Magnetische Erregung	$H = B / \mu$	A/m
Permeabilität	μ	$\text{Vs/(Am)} = \text{H/m}$
Vakuumpermeabilität	μ_0	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
Relative Permeabilität	$\mu_r = \mu / \mu_0$	Zahlenwert > 0

Unter «magnetischen Feldstärke» wird je nach Quelle die Flussdichte oder die Erregung verstanden.

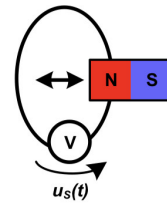
Weiter gelte folgende Konvention:

Bezeichnung	Bedeutung
B	Magnetfeld ist homogen im dargestellten Raum, d.h. die Stärke und Richtung sind unabhängig vom Raumpunkt. Beispiel: Erdmagnetfeld im Laborraum
B_i	Magnetfeld erzeugt durch den Strom i
B_M	Magnetfeld erzeugt durch den dargestellten Magneten



$U_s(t)$: Induktionsspannung

Spannungsschoss: $\int_0^T U_s(t) dt$ (Zeit-Spannungsfläche)
 $\rightarrow$ bei gegebenem Magnet & Schleife konstant



magnetischer Fluss Φ

$$\Phi_{\Delta A_i} = B_i \cdot \Delta A_i \cdot \cos \Theta_i$$

$$\Phi = \sum B_i \cdot \Delta A_i \cdot \cos \Theta_i$$

$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{A} \quad [\Phi] = \text{Tm}^2 = \text{Vs} = \text{Weber} = \text{Wb}$$

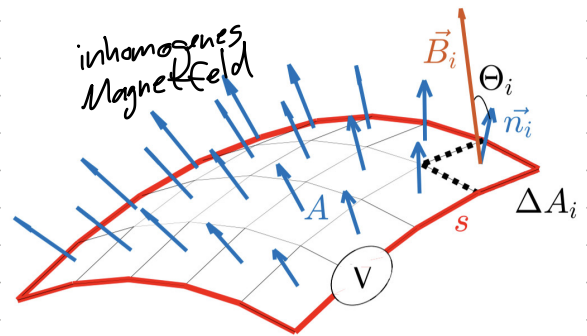
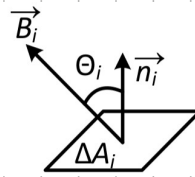
A : beliebig geformte Oberfläche

S : Leiterschleife

ΔA_i : quasi-ebenes Teilstück

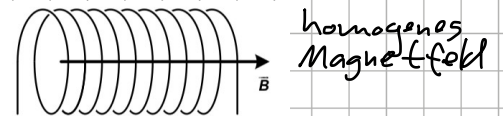
B_i : homogenes Magnetfeld in Teilstück

$$|\vec{n}| = \Delta A_i$$



magn. Fluss bei Spule < verketteter Fluss >

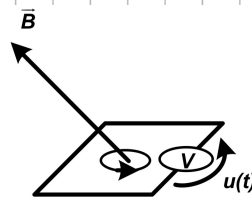
$$\Psi = N \cdot \Phi = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \Theta$$



Induktions-Gesetz von Faraday

$$U_s(t) = -N \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d\Psi(t)}{dt}$$

$U_s(t)$: Induktionsspannung einer Spule



Induktion durch...

Feldänderung $\Rightarrow$ Transformationspannung

$$\Phi(t) = B(t) \cdot A \cdot \cos \theta$$

Änderung d. Stärke d. B-Feldes

$\hookrightarrow$ Transformator

Bewegung $\Rightarrow$ Bewegungsspannung

$$\Phi(t) = B \cdot A \cdot \cos \theta(t)$$

Drehung d. Fläche in Bezug auf Magnetfeldrichtung

$\hookrightarrow$ Generatoren / Motoren

Änderung d. Fläche

aufgrund schwieriger Realisierung keine bekannte Anwendung

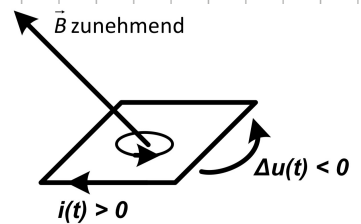
Wirbelstrom

auch bei KS induzierte Spannung

$\hookrightarrow$ über jedem gleich langen Abschnitt dieselbe Spannung
daher fließt Strom (bewirkt durch induzierte Spannung)

Wirbelstrom $\Rightarrow$ el. Feld E_i entlang der Schleife

Feldlinien von E_i müssen sich mit Feldlinien der Stromleitung decken
Feldlinien in sich geschlossen



Lenz'sche Regel

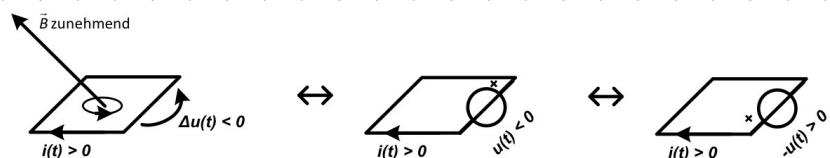
Wirbelstrom bewirkt B_i , welches der Flussänderung entgegen gesetzt ist

$\hookrightarrow$ muss, wegen E-Erhaltung

Maschensatz - Verallgemeinerung

$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = u_i \neq 0 \Rightarrow$ Maschensatz muss erweitert werden:

Ersatzspannungsquelle:



Induktivität

$$L = \frac{\Psi(t)}{i(t)} \quad (\text{nicht } u(t) = R \cdot i(t)) \quad [L] = \frac{Vs}{A} = \text{Henry} = H$$

Zylinderspule: $\Psi = \frac{\mu \cdot A}{\sqrt{l^2 + d^2}} \cdot N^2 \cdot I$

falls $L \gg \sqrt{A}$:

$$\Psi \approx \frac{\mu \cdot A}{l} \cdot N^2 \cdot I$$

$$L \approx \frac{\mu \cdot A}{l} \cdot N^2$$

μ : Permeabilität
 A : Querschnittsfläche
 l : Länge
 d : Durchmesser
 N : Windungszahl
 I : Stromstärke



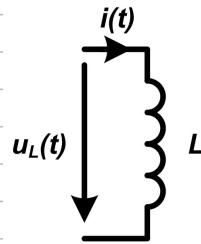
Spule als passiver Zweipol

Induktivität - Strom zu spät.
 Kondensator - Strom eilt vor.

$\Psi(t) = L \cdot i(t)$ wobei $\Psi(t) = N \Phi(t)$ (verketteter Fluss)

$u(t) = - \frac{d\Psi(t)}{dt} = - \frac{d(i(t))}{dt} \cdot L$ (Erzeugersystem)

$u_L(t) := -u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = N \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{di(t)}{dt} \cdot L$ (Verbrauchersystem)



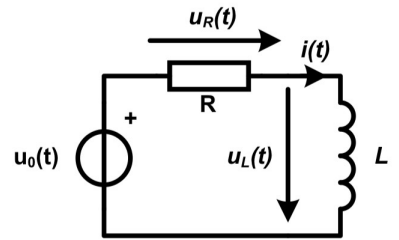
gespeicherte Energie

$P_L(t) = u_L(t) \cdot i(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \cdot i(t) = \frac{dW_L(t)}{dt}$

$W_L(t) = \int P_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot i(t)^2 + C$

falls kein Strom $\Rightarrow$ keine Energie $\Rightarrow C=0$

$W_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot i(t)^2$

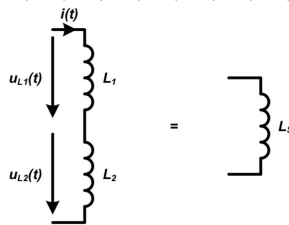


VerSchaltung von Spulen

seriell

$u_0 = \sum L_i \frac{di(t)}{dt} = (\sum L_i) \frac{di(t)}{dt} = L_s \frac{di(t)}{dt}$

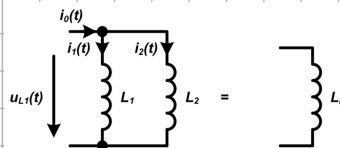
$\Rightarrow L_s = \sum L_i$



parallel

$\frac{di(t)}{dt} = \sum \frac{di_i(t)}{dt} = \sum \frac{u_0}{L_i} = u_0 (\sum \frac{1}{L_i}) = \frac{u_0}{L_p}$

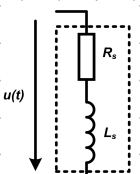
$\Rightarrow \frac{1}{L_p} = \sum \frac{1}{L_i}$



reale Spule

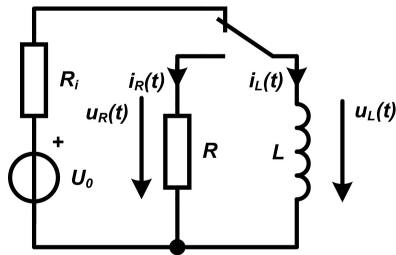
viel Draht $\Rightarrow$ neben induktiven Anteilen auch parasitärer ohmscher Widerstand:

Spannung realer Spule: $u(t) = R_s i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$



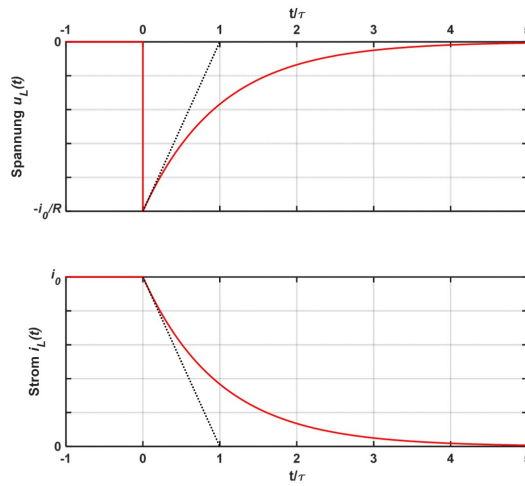
Schaltverhalten Spule

Ausschaltvorgang



$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$



$$u_L(t) - u_R(t) = 0$$

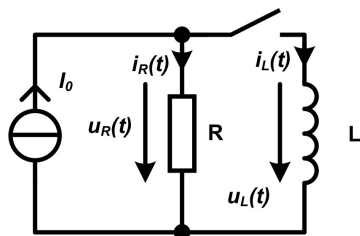
$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + R \cdot i_L(t) = 0$$

$$\tau \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0$$

$$i_L(t) = i_0 \cdot e^{-t/\tau}, \tau = \frac{L}{R}$$

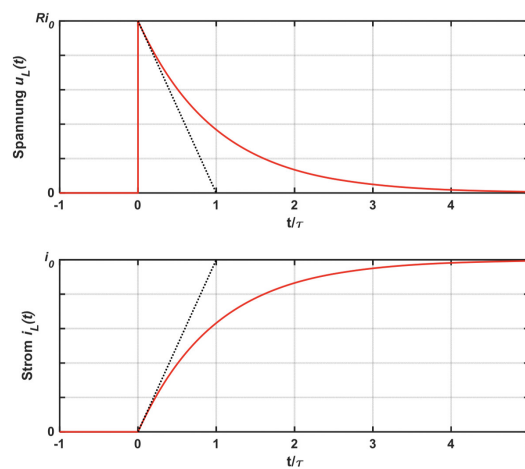
$$u_L(t) = -i_0 \cdot R \cdot e^{-t/\tau}$$

Einschaltvorgang



$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$



$$u_L(t) - u_R(t) = 0$$

$$i_R(t) + i_L(t) = i_0$$

$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} - R \cdot i_R(t) = 0$$

$$\tau \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = i_R(t)$$

$$\tau \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_0$$

$$i_L(t) = i_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau}), \tau = \frac{L}{R}$$

$$u_L(t) = i_0 \cdot R \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_0 = R \cdot i_0$$

Wechselstromlehre

Drehstrom

besondere Form von Wechselstrom:
3 zeitlich versetzte Wechselstromspannungen



Signal

zeitliche Verlauf einer physikalischen Grösse (hier Spannung oder Stromstärke)

Bedingungen für harmonisches (rein sinusförmiges) Signal in einer el. Schaltung

1. einheitliche, sinusförmige Anregung mit fester Frequenz (müssen nicht synchron sein, Nulldurchgänge können verschieden sein)
2. lineare Schaltung (Nichtlinearitäten erzeugen immer Vielfache der Anregungsfrequenz (Fourier-Reihe))
3. stationärer Zustand erreicht, Einschwingphase abgeklungen (Dauer der Einschwingphase nur von Schaltung und nicht von Frequenz abhängig)

Harmonische Signale und ihre Darstellung

Falls elektrische Schaltung mit linearen Bauelementen wie (ideale) Widerstände, Kondensatoren, Spulen mit harmonischen Spannungs- oder Stromquelle betrieben wird
 $\Rightarrow$ Spannungen und Stromstärken in dieser Schaltung nach kurzer Einschwingphase ebenfalls harmonisch.

Allgemeine Eigenschaften

Diese Spannungs- und Stromverläufe unterscheiden sich nur durch Amplitude und zeitliche Verschiebung
 $\Rightarrow$ können alle durch folgende Formel dargestellt werden

$$x(t) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi) = \hat{X} \cos(2\pi f t + \varphi) \quad (\text{verallgemeinerter Cosinus})$$

Die Gleichung (2.1) enthält drei Parameter welche das Signal eindeutig bestimmen:

Amplitude: $\hat{X} > 0$ mit der Einheit V oder A, je nach der Art des Signals

Nullphasenwinkel: φ Einheit: $[\varphi] = \text{rad}$ (Radiant)

Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f$ Einheit: $[\omega] = \text{s}^{-1}$ oder rad/s

Es folgen weitere mit diesen Parametern zusammenhängende Grössen:

Frequenz: $f = \frac{1}{T}$ Einheit: $[f] = \text{Hz} = \text{s}^{-1}$

Periodendauer: T Einheit: $[T] = \text{s}$

Zeitpunkt des Scheitelwertes: $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ Einheit: $[t_0] = \text{s}$

Phase: $\omega t + \varphi$ Einheit: $[\omega t + \varphi] = \text{rad}$

$$\varphi = -\omega t_0 = -\frac{2\pi}{T} t_0$$

Harmonische Signale $x(t)$ bekannter (einheitlicher) Frequenz können bereits mit dem Parameterpaar $(\hat{X}, \varphi)$ eindeutig beschrieben werden. Um diese Äquivalenz dieser Schreibweisen auszudrücken wird der Doppelpfeil $\leftrightarrow$ verwendet:

$$x(t) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow (\hat{X}, \varphi)$$

(2.3)

Effektivwert: $X = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Zeiger und komplexe Zahlen

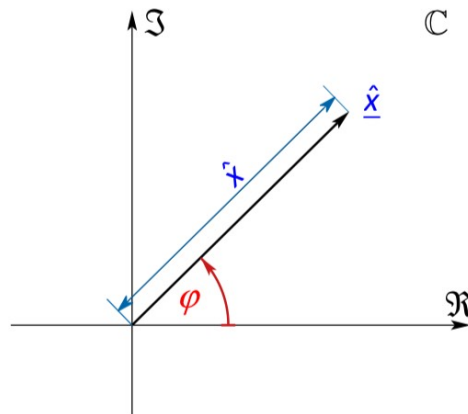
Interpretation von $(\hat{X}, \varphi)$ als Betrag und Winkel einer komplexen Zahl $\underline{\hat{X}}$:

$$\underline{\hat{X}} = \hat{X} e^{j\varphi}$$

$$x(t) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi) \xleftrightarrow{\text{lineare Abbildung}} \underline{\hat{X}} = \hat{X} e^{j\varphi} = \hat{X} \cos \varphi + j \hat{X} \sin \varphi$$

Homogenität: $y(t) = \alpha x(t) \leftrightarrow \underline{\hat{Y}} = \alpha \underline{\hat{X}}$

Additivität: $y(t) = x_1(t) + x_2(t) \leftrightarrow \underline{\hat{Y}} = \underline{\hat{X}}_1 + \underline{\hat{X}}_2$



harmonische Zeitfunktion aus komplexem Zeiger zurückgewinnen:

$$x(t) = \operatorname{Re}(\underline{\hat{X}} \cdot e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\hat{X} e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}) = \hat{X} \cdot \operatorname{Re}(e^{j(\omega t + \varphi)}) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi)$$

Ableitung der harmonischen Funktion $x(t)$:

$$y(t) = \dot{x}(t) = \omega \hat{X} \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \leftrightarrow \underline{\hat{Y}} = \omega \hat{X} e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = j\omega \underline{\hat{X}}$$

→ komplexen Zeiger mit $j\omega$ multiplizieren

→ Drehstreckung:

- Streckung um Faktor ω
- Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhreigersinn

Komplexe Widerstände und Leitwerte

Definitionen

Komplexe Spannungs-Amplitude $\hat{U} = \hat{U} e^{j\varphi_u}$ beschreibt die Zeitfunktion $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u)$

Komplexe Strom-Amplitude $\hat{I} = \hat{I} e^{j\varphi_i}$ beschreibt die Zeitfunktion $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_i)$

Effektivwert der Spannung: $U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$

Effektivwert des Stroms: $I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$

Komplexer Effektivwertzeiger der Spannung: $\underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$

Komplexer Effektivwertzeiger des Stroms: $\underline{I} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$

Komplexer Widerstand oder **Impedanz**: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = R + jX$

Wirkwiderstand oder **Resistanz**: $R = Z \cos \varphi$

Blindwiderstand oder **Reaktanz**: $X = Z \sin \varphi$

Betrag der Impedanz oder **Scheinwiderstand**: $Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \sqrt{R^2 + X^2}$

Komplexer Leitwert oder **Admittanz**: $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi} = G + jB$

Wirkleitwert oder **Konduktanz**: $G = Y \cos \varphi$

Blindleitwert oder **Suszeptanz**: $B = -Y \sin \varphi$

Betrag der Admittanz oder **Scheinleitwert**: $Y = |\underline{Y}| = \frac{I}{U} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \sqrt{G^2 + B^2}$

Phasenverschiebungswinkel: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \Delta t$, $\Delta t = t_{0,i} - t_{0,u}$

Achtung: Bei den komplexen Größen $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$ sind die Realteile R und G nicht reziprok zueinander: $R \neq 1/G$. Die Symbole dürfen nicht mit den identischen Symbolen für Widerstand und Leitwert verwechselt werden.

Der Winkel φ kann auf vielfache Weise berechnet werden:

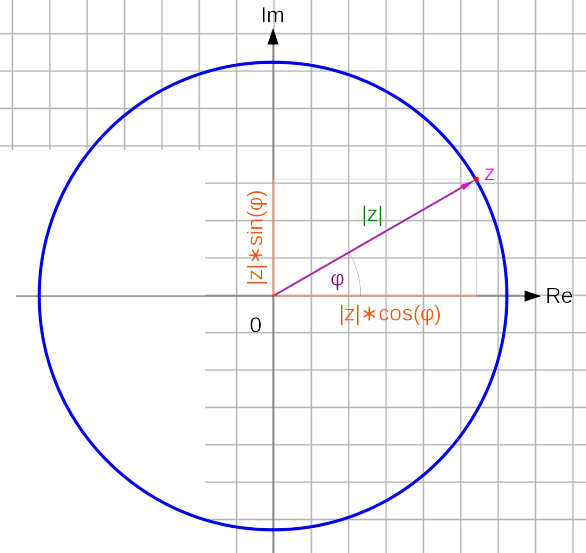
$$\varphi = \arg(\underline{Z})$$

$$= -\arg(\underline{Y})$$

$$= \Im(\ln(\underline{Z}))$$

$$= \arctan\left(\frac{X}{R}\right), \text{ gilt nur für } \underline{Z} = R + jX \text{ im 1. oder 4. Quadranten}$$

Die Funktion $\arg()$ – welche den Winkel einer komplexen Zahl liefert – heisst in MATLAB $\text{angle}()$



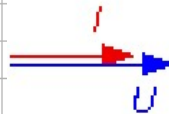
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$Y = \frac{1}{Z}$$

Widerstand

$$\underline{Z} = R = \frac{u(t)}{i(t)} \quad \left. \begin{array}{l} \underline{Y} = G = \frac{i(t)}{u(t)} \end{array} \right\} \text{ nur hier, nicht allgemein}$$

$$\varphi = 0, \text{ da } \varphi_u = \varphi_i$$



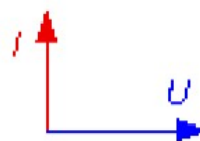
Kapazität

$$i(t) = C \dot{u}(t) \Leftrightarrow \underline{I} = j\omega C \underline{U}$$

$$\underline{Z} = j \frac{1}{\omega C} = jX$$

$$\underline{Y} = j\omega C = jB$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \text{ da } \varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$$



Kondensator – Strom eilt vor.

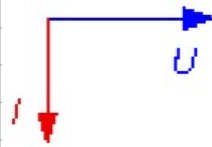
Selbstinduktivität

$$u(t) = L \dot{i}(t) \Leftrightarrow \underline{u} = j\omega L \underline{i}$$

$$\underline{Z} = j\omega L = jX$$

$$\underline{Y} = j\frac{1}{\omega L} = jB$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ da } \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$



Induktivität- Strom zu spät.

Gegeninduktivität

$L_{12} = \frac{\Phi_{12}(t)}{i_2(t)}$; erster Index: auf welche Fluss wirkt, zweiter: Quelle des Flusses
beeinflussen sich gegenseitig $\Rightarrow$ gibt auch L_{21}

bei linearen Kreisen: $L_{12} = L_{21}$

$u_1(t) = L_1 \dot{i}_1(t) + L_{12} \dot{i}_2(t)$; ind. Spannung im ersten Kreis

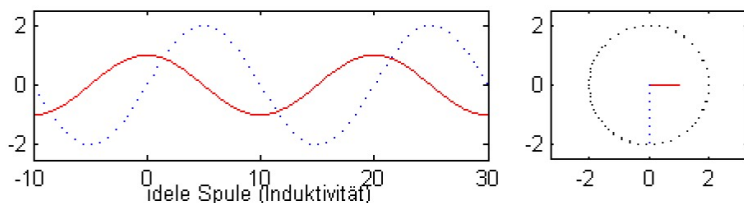
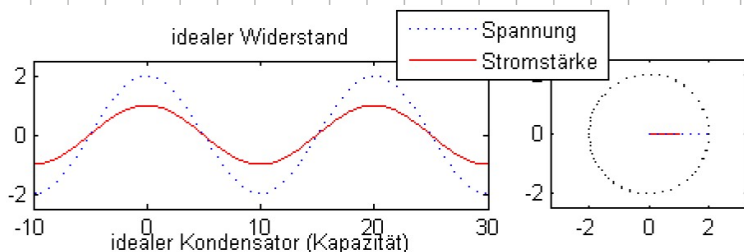
$u_2(t) = L_2 \dot{i}_2(t) + L_{12} \dot{i}_1(t)$; ind. Spannung im zweiten Kreis

Vorzeichen von L_{12} hängt von Bezugsrichtung der Stromstärken und gegenseitiger Orientierung der Kreise ab

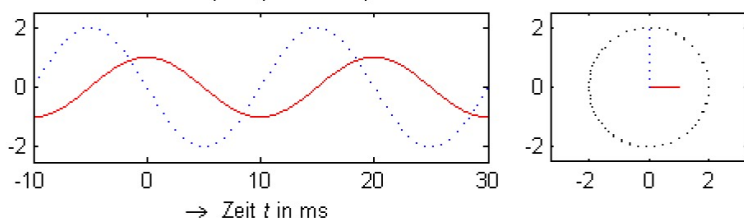
$|L_{12}| \leq \sqrt{L_1 L_2}$; Gleichheit wenn gesamter in Kreis 1 erzeugter Fluss Kreis 2 durchdringt und umgekehrt

Zusammenfassung

Eigenschaft	Widerstand R	Kapazität C	Induktivität L
Impedanz $\underline{Z}$	R	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$
Admittanz $\underline{Y}$	$G = \frac{1}{R}$	$j\omega C$	$\frac{1}{j\omega L}$



Kondensator- Strom eilt vor.

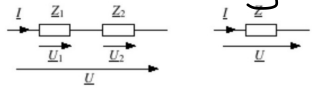


Induktivität- Strom zu spät.

Einfache Wechselstromschaltungen



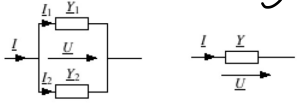
Serienschaltung



$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \dots + \underline{Z}_n$$

$$\underline{U}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_1 + \dots + \underline{Z}_n} \underline{U}$$

Parallelschaltung



$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \dots + \underline{Y}_n$$

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_1 + \dots + \underline{Y}_n} \underline{I}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Ersatzzweipole

Passive Wechselstromzweipole können aus beliebig vielen linearen R-, L- und C-Elementen bestehen und durch Parallel- und Reihenschaltung in ein Ersatzzweipol zusammengefasst werden. Ihr Klemmenverhalten bei fest gegebener Frequenz kann immer durch die Angabe der Impedanz $\underline{Z}$ oder der Admittanz $\underline{Y}$, beziehungsweise deren Real- und Imaginärteile eindeutig beschrieben werden. Dies führt immer auf eine Kombination von einem Widerstand für den Realteil und einer Kapazität oder Induktivität für den Imaginärteil. Dabei kann ein Serie- oder ein Parallelmodell als Ersatzschaltung gewählt werden.

Diese Umrechnungen gelten nur für die Frequenz bei der sie gemacht wurden!

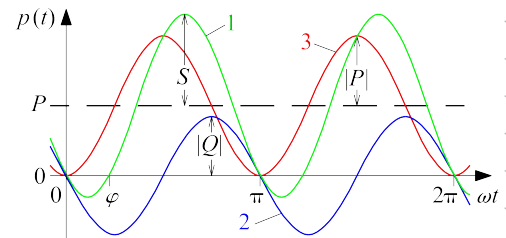
Resonanz

Unter **Resonanz** eines linearen, elektrischen Zweipols versteht man die besondere Betriebsart bei welcher die Impedanz oder die Admittanz des Zweipols *rein reell* wird¹². Dies ist dann der Fall, wenn entweder der Imaginärteil oder der Winkel (Argument) der komplexen Grösse verschwinden. Dies kann durch entsprechende Wahl der Frequenz der sogenannten **Resonanzfrequenz** oder durch die Festlegung irgendeines anderen Parameters der Schaltung bewirkt werden.

¹² Diese Definition ist auf elektrische lineare Zweipole beschränkt. Je nach Fachgebiet gibt es andere und möglicherweise leicht verschiedene Definitionen.

Leistung

$$\begin{aligned} \text{Momentanleistung: } p(t) &= u(t) \cdot i(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \\ &= \underbrace{UI \cos(\varphi)}_{\text{Wirkleistung}} + \underbrace{UI \cos(\varphi) \cos(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Wechselanteil aufgrund Wirkanteil}} + \underbrace{UI \sin(\varphi) \sin(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Wechselanteil aufgrund Blindanteil}} \\ &= \underbrace{P}_{\text{Wirkleistung}} + \underbrace{P \cdot \cos(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Wechselanteil aufgrund Wirkanteil}} + \underbrace{Q \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Wechselanteil aufgrund Blindanteil}} \end{aligned}$$



- 1: Momentanleistung
- 2: Blindanteil
- 3: Wirkanteil

Wirkleistung

$$P = UI \cos(\varphi) = S \cos(\varphi) = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Blindleistung

$$Q = UI \sin(\varphi) = S \sin(\varphi)$$

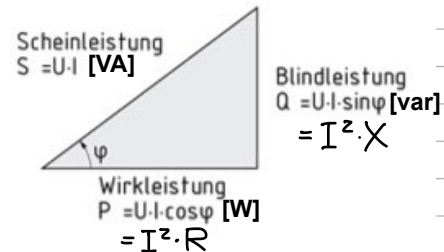
Scheinleistung

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\underline{S} = S \angle \varphi = P + jQ$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Q}{P}$$

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ \\ &= (\underline{Z} \cdot \underline{I}) \underline{I}^* = \underline{Z} I^2 = R I^2 + jX I^2 \\ &= \underline{U} \cdot (\underline{Y} \cdot \underline{U})^* = \underline{Y}^* U^2 = G U^2 + j(B U^2) \end{aligned}$$



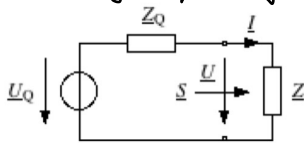
Leistungsfaktor

$$\lambda = \cos(\varphi) = \frac{P}{S} \quad (\text{Blindfaktor: } \sin(\varphi) = \frac{Q}{S})$$

Blindleistungskompensation

falls Q gross $\rightarrow$ unnötige Verluste in Zuleitungen, da mehr Strom hin und her fließt als nur für die Wirkleistung benötigt würde
 $\rightarrow$ daher versucht man λ zu maximieren

Leistungsanpassung



Wirkleistungsanpassung (für feste Frequenz):

$$\underline{Z} = \underline{Z}_0^* \quad (R = R_0, X = -X_0) \Rightarrow P = \frac{U_0^2}{4R_0}, \quad Q = -\frac{X_0}{4R_0^2} U_0^2$$

Scheinleistungsanpassung (für möglichst grossen Frequenzbereich):

$$\underline{Z} = \underline{Z}_0 \quad (R = R_0, X = X_0) \Rightarrow P = \frac{R_0}{4(R_0^2 + X_0^2)} U_0^2, \quad Q = \frac{X_0}{4(R_0^2 + X_0^2)} U_0^2$$

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

P_{ab} : abgegebene Leistung (Nutzleistung)

P_{zu} : aufgenommene Leistung

$$\text{Verlustleistung } P_v = P_{zu} - P_{ab}$$

Frequenzverhalten Linearer Netzwerke

Methoden d. Wechselstromlehre auf beliebige periodische Signale erweiterbar

Frequenzgang Abhängigkeit komplexer Grösse von (Kreis-) Frequenz

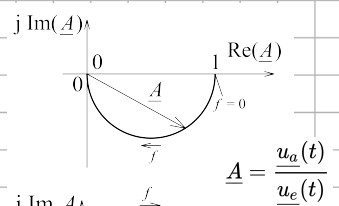
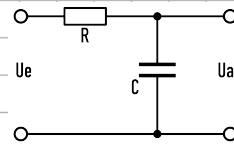
Frequenzgangs f. $H(\omega) = \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)}$ (z.B.)

Amplituden- / Phasengang $|H(\omega)|$, $\angle H(\omega)$

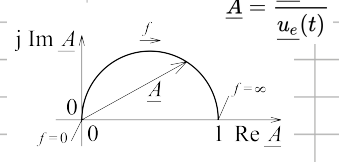
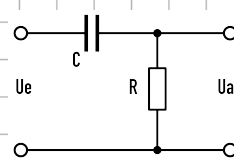
Bodediagramm Amplitudengang log. und Phasengang lin. gegen Log.
↳ 2 Plots Darstellung d. (Kreis-) Frequenz

Ortskurve komplexe Zahl d. Frequenzgangsfunktion als frequenzabhängiger Punkt in kompl. Ebene, d.h. einzelne markierte Punkte werden mit dazugehöriger (Kreis-) Frequenz
↳ 1 Plot
→ in Regelungstechnik auch Nyquist-Diagramm genannt

Tiefpassfilter  hohe f gedämpft



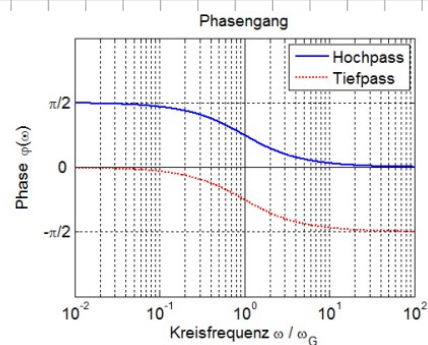
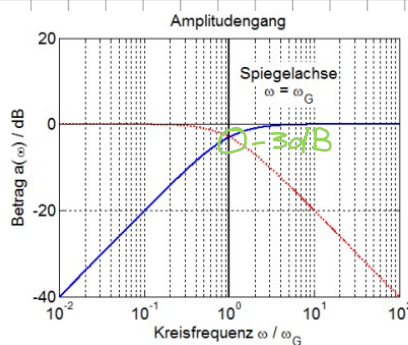
Hochpassfilter  tiefe f gedämpft



Bandpass 

Bandsperre 

Bodediagramme



Grenzfrequenz
(cutoff frequency)

bei f_c ist $U_a = \frac{1}{\sqrt{2}} U_b \hat{=} -3\text{dB}$,
für Schaltungen oben ist dies $\frac{1}{2\pi RC}$

elementare zeitliche
Beziehungen und
ihre Frequenzgang-
funktionen

	Zeitbereich		Frequenzbereich	
	$y(t) = f(x(t))$	$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$	Amplitudengang	Phasengang
			$ H(\omega) $	$\angle H(\omega)$
Verstärkung / Dämpfung	$y(t) = k \cdot x(t)$			
	$k > 0$	k	k	0
	$k < 0$	k	$ k $	$\pm\pi$
Differentiation	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega$	ω	$\frac{\pi}{2}$
Integration	$y(t) = \int_0^t x(t) dt$ mit $y(0)=0$	$\frac{1}{j\omega}$	$\frac{1}{\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

Frequenzen nicht
normiert

$x(t)$: Eingangsgrösse
(harmonisch)

$y(t)$: Ausgangsgrösse
(harmonisch)

Zusammengesetzte Frequenzgangfunktionen

beliebige Frequenzgangf. (Übertragungsf.) lässt sich immer als Produkt von elementaren Frequenzgangf. oder deren reziproker F. darstellen (Produktform)

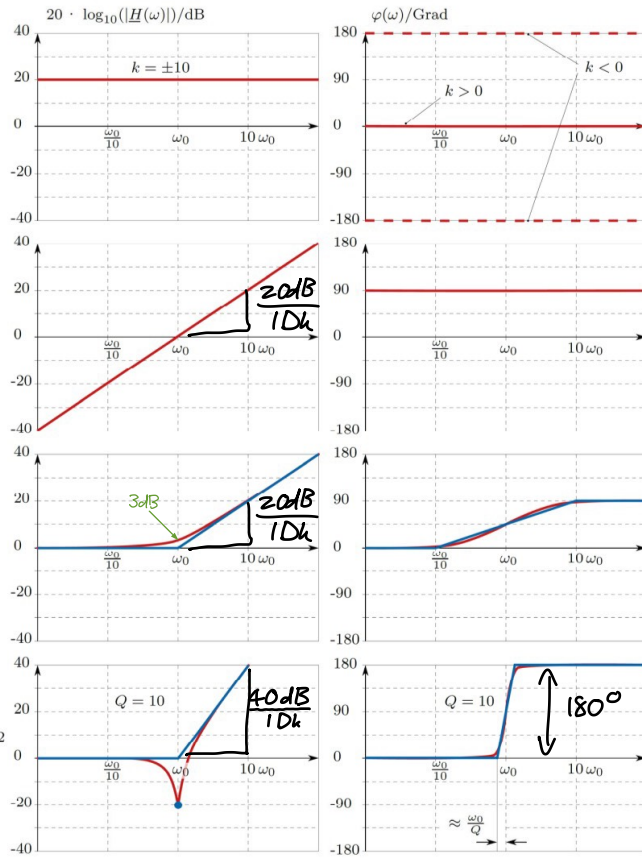
elementare Frequenzgangf.

k
0. Ordnung

$\frac{j\omega}{\omega_0}$
1. Ordnung

$1 + \frac{j\omega}{\omega_0}$
1. Ordnung

$1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$
2. Ordnung



rot → tatsächlicher Verlauf
blau → angenäherter Verlauf

Amplitudengang

Operation	Auswirkung auf den Amplitudengang
Vorzeichen	$\log(-H(f)) = \log(H(f))$
Kehrwert	$\log\left(\frac{1}{H(f)}\right) = -\log(H(f))$
Multiplikation	$\log(H_1(f) \cdot H_2(f)) = \log(H_1(f)) + \log(H_2(f))$
Division	$\log\left(\frac{H_1(f)}{H_2(f)}\right) = \log(H_1(f)) - \log(H_2(f))$

Phasengang

Operation	Auswirkung auf den Phasengang
Vorzeichen	$\text{angle}(-H(f)) = \text{angle}(H(f)) \pm \pi$
Kehrwert	$\text{angle}\left(\frac{1}{H(f)}\right) = -\text{angle}(H(f))$
Multiplikation	$\text{angle}(H_1(f) \cdot H_2(f)) = \text{angle}(H_1(f)) + \text{angle}(H_2(f))$
Division	$\text{angle}\left(\frac{H_1(f)}{H_2(f)}\right) = \text{angle}(H_1(f)) - \text{angle}(H_2(f))$

normierte Frequenz

ω_0/f_0

τ

Ordnung

Dk

Resonanzfrequenz

Spannungsüberhöhung

Gütefaktor Q

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

Bezugs(kreis)frequenz $\rightarrow$ (zweckmässig) wählbar (z.B. $1s^{-1}$, ω_g , ω_r)

Zeitkonstante: $\tau = 1/\omega_g$, $f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}$

beschreibt Verstärkungsabnahme (mit) oberhalb der unterhalb der Grenzfrequenz

Dekade (Zehnerpotenz)

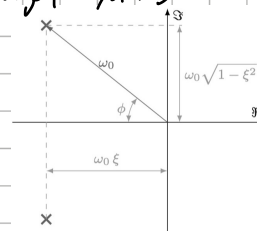
entspricht (bei elektr. Zweipolen) der Frequenz, bei welcher der Zweipol ein rein reelles Verhalten aufweist, d.h. rein dissipativ wirkt

$$U_{C/L} > U_{\text{eff}}$$

Mass für Energieverlust eines zu Schwingungen fähigen Systems
 $\rightarrow$ hohe Güte $\hat{=}$ schwach gedämpft $\rightarrow$

$$\text{PTZ: } G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q} \frac{s}{\omega_0} + 1}$$

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2\cos(\phi)}$$



Logarithmierte Grössenverhältnisse

Leistungsverhältnisse

$$A_p = 10 \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad \text{Dämpfung in dB} \quad (\text{attenuation})$$

$$G_p = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad \text{Verstärkung in dB} \quad (\text{gain})$$

$$\text{Es gilt offensichtlich: } G_p = -A_p$$

P_1/P_2	dB	Beschreibung
0,001	-30 dB	
0,01	-20 dB	Abschwächung
0,1	-10 dB	
1	0 dB	1:1-Übertragung
10	10 dB	
100	20 dB	Verstärkung
1000	30 dB	

Signalverhältnisse
(falls R_1 & R_2 bekannt)

$$A_p = 10 \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = 20 \log\left(\frac{U_1}{U_2}\right) - 10 \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = A_u - 10 \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$G_p = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 20 \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) - 10 \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = G_u - 10 \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Werden die Spannungen U_1 und U_2 am selben Widerstand R gemessen, so gilt $A_u = -A_p$ und $G_u = 2 \cdot G_p$.

Leistungspegel

Leistung P in Watt	Leistungspegel in dB Milliwatt
10 W	40 dBm
1 W	30 dBm
100 mW	20 dBm
10 mW	10 dBm
4 mW	6 dBm
2 mW	3 dBm
1 mW	0 dBm
100 μ W	-10 dBm
10 μ W	-20 dBm
1 μ W	-30 dBm
1 nW	-60 dBm
1 pW	-90 dBm

dBm (Dezibel Milliwatt) ist die Einheit des Leistungspegels L_P , der das Verhältnis einer Leistung P im Vergleich zur Bezugsleistung von 1 mW (Milliwatt) beschreibt.

$$L_P(\text{dBm}) = 10 \log_{10}\left(\frac{P}{1 \text{ mW}}\right)$$

und in der Umkehrung, wenn die Leistung gesucht ist:

$$P(\text{mW}) = 10^{\left(\frac{L_P(\text{dBm})}{10}\right)} \cdot 1 \text{ mW}$$

1 mW entspricht 0 dBm, Werte über 1 mW ergeben positive dBm-Werte, Werte unter 1 mW negative.

Dezibel Milliwatt (dBm) und Dezibel Watt (dBW) können direkt ineinander umgerechnet werden, sie unterscheiden sich um jeweils 30 dB (Faktor 1000).

$$L_P(\text{dBm}) = L_P(\text{dBW}) + 30 \text{ dB}$$

Spannungspegel

Spannung U in Volt	Spannungspegel in dB Microvolt
1 V	120 dB μ V
100 mV	100 dB μ V
10 mV	80 dB μ V
1 mV	60 dB μ V
100 μ V	40 dB μ V
10 μ V	20 dB μ V
1 μ V	0 dB μ V

Hinweise: Beim Einsatz von Spulen sind obige Darstellungen nur passend, wenn die Spulenverluste vernachlässigbar sind; «nicht physikalisch» = kann mit einer Schaltung aus R , L und C nicht exakt nachgebildet werden; die obige Aufstellung ist nicht abschliessend, sondern exemplarisch (es gibt viele weitere Schaltungen mit gleichen Frequenzgängen)

Reale Bauelemente

Festwiderstände

Chip-W.



MELF-W.



bedrahtete W.



Signalverarbeitung (bis hohe f)

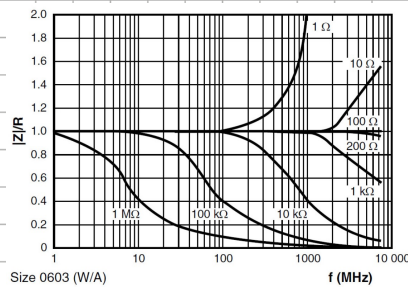
wie Chip-W. aber besser / teurer

kleiner R, mittlere bis sehr grosse Nennleistung (dieser niedr. f)

Temperaturabh.

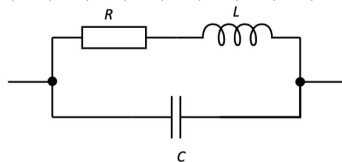
$$R(\theta) = R_{20} (1 + \alpha_{20}(\theta - 20^\circ\text{C}))$$

Frequenzabh.



- Chip-Widerstände sind zwar klein, aber je nach Wert weichen sie schon bei relativ tiefen Frequenzen (10 MHz) signifikant vom Nennwert ab
- In den GHz-Bereich kommt man ohne grosse Abweichung vom Nennwert nur mit einem sehr beschränkten Wertebereich um 100 Ω
- Chip-Widerstände mit hohem Wert (ab ca. 1 k Ω) weisen ab einer gewissen, Werte-abhängigen Frequenz zusätzlich kapazitives Verhalten auf: die Impedanz sinkt mit zunehmender Frequenz
- Chip-Widerstände mit kleinem Wert (unter ca. 100 Ω) weisen ab einer gewissen Werte-abhängigen Frequenz zusätzlich induktives Verhalten auf (Impedanz steigt mit zunehmender Frequenz)

Ersatzschaltbild



$$\omega_0 = \frac{R}{L} \quad \text{bzw.} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Kapazität haupts. von Anschlusskappen
Induktivität haupts. von Zuleitung

$$|Z| > R: L = \frac{1}{2\pi f} \cdot \sqrt{\left(\frac{|Z|}{R} \cdot R\right)^2 - R^2}$$

$$|Z| < R: C = \frac{1}{2\pi f} \cdot \sqrt{\left(\frac{|Z|}{R} \cdot R\right)^2 - \frac{1}{R^2}}$$

Kondensatoren (fest)

Chip-K.



Becher-K.



Becher-K.
bedrahtet



Dielektrikum	Bauformen	Kapazität	Toleranz
COG, NP0	Chip	47 nF (0805)	1%
X7R	Chip	10 μ F (0805)	5%
Tantaloxid	Chip	47 μ F (0805)	5%
Aluminiumoxid	Becher	100 μ F ($\varnothing$ 4 mm, 6 mm hoch)	10%
Doppelschicht-Kondensator	Becher	100 mF ($\varnothing$ 4 mm, 12 mm hoch)	-20%/+50%

Temperaturabh.

$$C(\theta) = C_{20} (1 + \alpha_{20}(\theta - 20^\circ\text{C}))$$

Selbstentladung
Zeitkonst

aufgrund endl. Isolationsw. R_{Is}

bei homog. Dielektr. mit Perm. ϵ_0 und Leitf. γ :

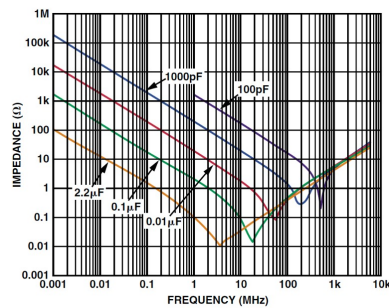
$$\tau = R_{Is} C = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$

ESR

Equivalent Series Resistance

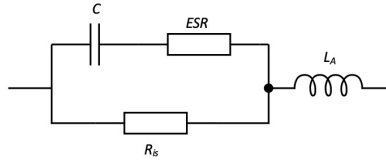
Typ	ESR
Aluminium-Flüssigelektrolyt	0.1 ... 10 Ω ; Steigt mit Frequenz, Alter, Temperatur, Welligkeits-amplitude
Tantal-Mangandioxid	0.1 ... 10 Ω ; Steigt mit der Frequenz
Keramik	0.01 ... 0.1 Ω ; Relativ stabil über alles

Frequenzabh.

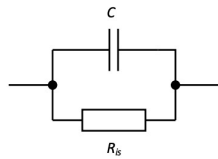


- Bis zu einer gewissen Frequenz verhält sich der Kondensator wie gewollt, die Impedanz fällt mit -20 dB/Dk .
- Bei einer gewissen Frequenz kommt es zur Umkehr: Oberhalb dieser Frequenz verhält sich der Kondensator induktiv.
- Der Wendepunkt ist folglich ein Selbstresonanzpunkt, bei welchem sich die kapazitive und die induktiven Anteile gerade aufheben, man sieht an diesem Punkt den ESR.

Ersatzschaltbild



tiefe f
(unterhalb ω_g)



→ kann bei fester f durch äquivalentes
Serienmodell ersetzt werden

$$\omega_g = \frac{1}{R_{IS}C} \quad \varphi(\omega_g) = \varphi_n - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

Gütefaktor

Verlustfaktor

Verlustwinkel

$$Q_C = \frac{B}{G} = \frac{-X}{R} = \frac{-Q}{P} = \frac{-I^2 X_C}{I^2 \cdot ESR} = \frac{1}{\omega C \cdot ESR} \quad \text{frequenzabhängig!}$$

$$d = 1/Q_C$$

$$\delta = \arctan(d)$$

Spulen (fest)



Nennwert

tiefe f und/oder
Stromstärke

hohe f

bee. gewisser f und Stromstärke

Güte sinkt, nahe Gleichstrom praktisch nur noch Widerstand

mehrere Effekte:

- Selbstresonanz durch parasitäre Kapazität
- Permeabilität sinkt ab gewisser Grenzfrequenz
- Skin-Effekt
- Proximity-Effekt

Induktivitätsfaktor

$$\text{für eigene Herstellung: } L \approx A_L N^2$$

Kernmaterial

- Luft (nur bei hohen f brauchbar)
- Ferrite → gute Leitfähigkeit, gute Permeabilität

Verluste

Kupferverluste

Kernverluste

Wirbelströme

Hysteresis

Trägheit d. Elementarm.

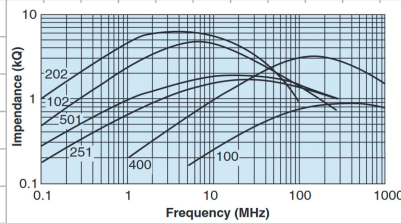
$$P_{cu} = RI^2$$

$$P_{ur} \propto f^2$$

Ummagnetisieren d. Elementarmagnete braucht Energie

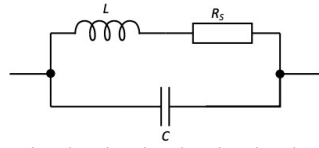
um zu berücksichtigen → Permeabilität als komplexe Grösse: $\underline{\mu} = \mu_0 \underline{\mu}_r$

Frequenzabh.



- Bis zu einer gewissen Frequenz verhält sich die Spule wie gewollt, die Impedanz steigt mit etwa 20 dB/Dk
- Bei einer gewissen Frequenz kommt es zur Umkehr: Oberhalb dieser Frequenz verhält sich der die Spule kapazitiv.
- Der Wendepunkt ist folglich ein Selbstresonanzpunkt, bei welchem sich die induktiven und die kapazitiven Anteile gerade aufheben.

Ersatzschaltbild



tiefe f
(unterhalb $\frac{\omega_r}{10}$)



→ kann bei fester f durch äquivalentes Parallelmodell ersetzt werden

Gütefaktor

Verlustfaktor

Verlustwinkel

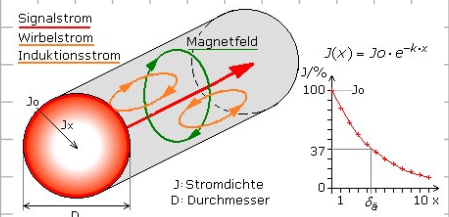
$$Q_L = \frac{X}{R} = \frac{-B}{G} = \frac{Q}{P} \quad \text{frequenzabhängig!}$$

$$d = 1/Q_L$$

$$\delta = \arctan(d)$$

Skin-Effekt

bei Wechselstrom ändert sich Magnetfeld → induziert Wirbelströme, welche Signalstrom entgegen gerichtet sind (Lenz)
→ benutzter Leiterquerschnitt ↓
→ Leiterwiderstand ↑



Proximity-Effekt

Stärke d. Effekts

Kernmaterial

bei mehreren benachbarten Leitern analog zu Skin-Effekt

proportional zu $\sqrt{f}$

bei Spulen mit Kern i.d.R. vernachlässigbar, da Verluste im Kern proportional zu f^2