Vektoren

Standardvektorraum $\mathbb{K}^n := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_k \in \mathbb{K},\ 1 \leq k \leq n \right\}$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2 Rechenoperationen:

Addition: $x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{K}^n, \quad x+y \in \mathbb{K}^n$

Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \ x \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda \cdot x \in \mathbb{K}^n$

↳ Streckung/Stauchung

Norm: $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}, \quad x \in \mathbb{K}^n, \ \|x\| \in \mathbb{R}_0^+$

↳ Länge

$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$\|x\| = 0 \Rightarrow x = \vec{0}$ (Nullvektor)

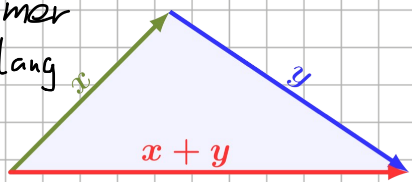
Einheitsvektor: $e \in \mathbb{K}^n$ mit $\|e\| = 1$

$\vec{e_v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ (Einheitsvektor in gleiche Richtung wie $\vec{v}$)

Dreiecksungleichung:

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$

direkter Weg immer kürzer/gleich lang



Skalarprodukt: $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k y_k = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n \quad x, y \in \mathbb{K}^n, \ \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$

$\langle w + x, y \rangle = \langle w, y \rangle + \langle x, y \rangle$

$\langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$ und $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

$\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k x_k} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$w, x, y \in \mathbb{K}^n, \ \lambda \in \mathbb{K}$

gilt alles allgemein in $\mathbb{K}^n$

→ für $\mathbb{R}^n$ erübrigt sich das Konjugieren

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$:

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos(\varphi)$

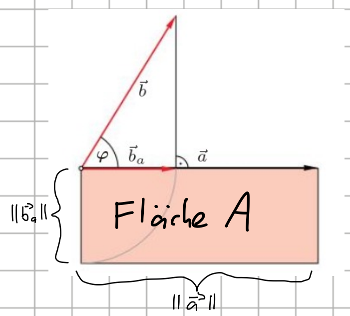
$\varphi = \arccos\left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \right) \in [0, \pi]$ Winkel zw. 2 Vektoren

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} = 90° \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (orthogonal) ≙ senkrecht

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ (Winkel spitz)

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ (Winkel stumpf)

$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|$ ist Fläche des roten Rechtecks



$A = |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|$

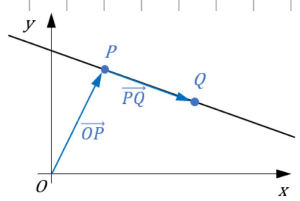
$= \|\vec{b_a}\| \cdot \|\vec{a}\|$

$(= \|\vec{a_b}\| \cdot \|\vec{b}\|)$!

Orthogonalprojektion $\vec{b_a}$

$\vec{b_a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|} \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}$

Parameterdarstellung einer Geraden

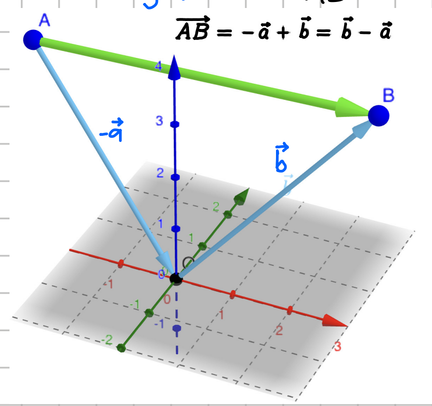


$g: \vec{r}_g = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ Stützvektor

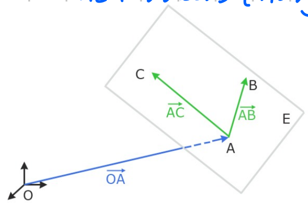
$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$ Richtungsvektor

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$



« Endpunkt - Startpunkt »

Parameterdarstellung einer Ebene

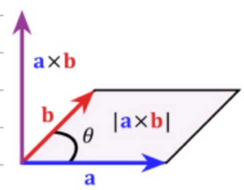


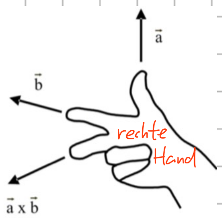
$E: \vec{r}_E = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} \qquad s, t \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ Stützvektor

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} \end{array}\right\}$ Spannvektoren

Vektorprodukt $a \times b$:

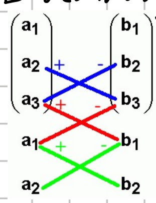




$(a \times b) \perp a \quad \wedge \quad (a \times b) \perp b$

$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\vartheta)$

Berechnung Vektorprodukt:



a2 b3 - a3 b2 1. Zeile

a3 b1 - a1 b3 2. Zeile

a1 b2 - a2 b1 3. Zeile

Berechnung von Flächen:

Dreieck: $A = \frac{1}{2}\|a \times b\|$

Parallelogramm: $A = \|a \times b\|$

$a \times b = -b \times a \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^3$

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$

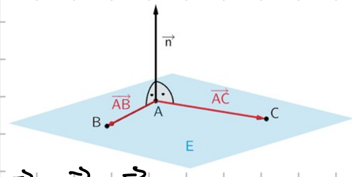
$\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$

$a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$ (im Allgemeinen)

falls a und b parallel $\Rightarrow a \times b = 0$

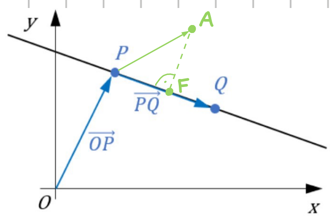
Normalenvektor einer Ebene

Vektorprodukt der Spannvektoren



$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Fusspunkt eines Punktes auf Gerade



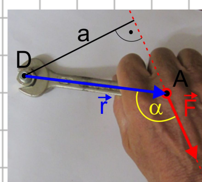
$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PF}$

$\overrightarrow{PF} = \frac{\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{\|\overrightarrow{PQ}\|^2} \overrightarrow{PQ}$

Drehmoment M einer Kraft F mit Hebelarm r:

$M = r \times F \qquad \|M\| = \|F\| \cdot \|r\| \cdot \sin(\alpha)$

falls $\alpha = 90° \Rightarrow \sin(\alpha) = 1 \Rightarrow \|M\| = \|F\| \cdot \|r\|$



Spatprodukt $\langle a \times b, c \rangle$:

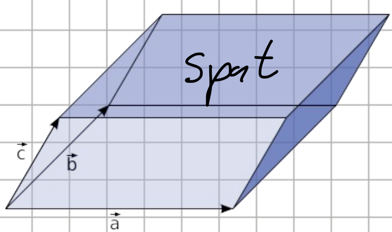
Der Ausdruck

$$\langle a \times b, c \rangle$$

heisst das Spatprodukt der drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Das Spatprodukt ist zyklisch und alternierend, d.h.

$$\langle a \times b, c \rangle = \langle c \times a, b \rangle = \langle b \times c, a \rangle$$
$$\langle a \times b, c \rangle = \langle c, a \times b \rangle$$
$$\langle a \times b, c \rangle = -\langle b \times a, c \rangle$$

Ist das Spatprodukt grösser als null, bilden a, b, c ein rechtshändiges System, sonst ein linkshändiges System.

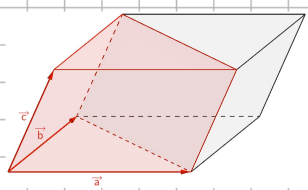


Volumen:

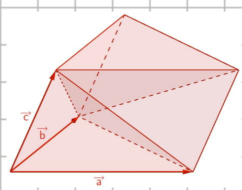
Spat: $V = |\langle a \times b, c \rangle|$

Tetraeder: $V = \frac{1}{6}|\langle a \times b, c \rangle|$

(3-eckiges) Prisma: $V = \frac{1}{2}|\langle a \times b, c \rangle|$



$V_{Prisma} = \frac{1}{2} V_{Spat}$



$3 V_{Tetraeder} = V_{Prisma}$

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Vektorraum der Matrizen (Menge aller Matrizen)

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{K}^{m\times n} := \left\{ A \;\middle|\; A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}},\ a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Addition:

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \quad A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

Skalarmultiplikation:

$$\lambda \cdot A := \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ \lambda \in \mathbb{K}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

$\mathbb{K}^{m\times n}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Das heisst, die gleichen Regeln (Vektorraumaxiome) wie für Vektoren sind erfüllt.

Produkt "Matrix mal Vektor": = Vektor

$$Ax = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A\in\mathbb{K}^{m\times n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x\in\mathbb{K}^n}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{A\cdot x\in\mathbb{K}^m}$$

Produkt "Matrix mal Matrix": = Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = C$

$A \in \mathbb{K}^{m\times l}$, $B \in \mathbb{K}^{l\times n}$, $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$

→ A muss gleich viele Spalten haben wie B Zeilen hat, nämlich l

$B \cdot A$ nicht definiert (ausser $m = n$)

Rechenregeln:

$$C(BA) = (CB)A$$
$$(C+B)A = CA + BA$$
$$C(B+A) = CB + CA$$
$$BA \neq AB \quad \text{(i. A. nicht kommutativ)}$$

Einheitsmatrix:

$$\mathbb{1}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

$A = \mathbb{1}_m A = A \mathbb{1}_n$, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$\mathbb{1}_n^{-1} = \mathbb{1}_n$

$\mathbb{1}_n^T = \mathbb{1}_n$

$\det(\mathbb{1}_n) = 1$

Nullmatrix:

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

$A + 0 = 0 + A$, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_m$, $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{0}_m \in \mathbb{K}^m$

$(0_{mn})^T = 0_{nm}$

Matrix kann als Funktion aufgefasst werden:

$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ x \mapsto y = Ax$ «verwandelt Vektor x in Vektor y»

3.3.2 Allgemeine lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) besteht aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ und hat die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

wobei die Zahlen $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ als **Koeffizienten** bezeichnet werden.

Matrixschreibweise

Mit Hilfe des Produktes von Matrizen mit Vektoren kann das lineare Gleichungssystem in Matrixschreibweise dargestellt werden. Sei A die $m \times n$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit den Koeffizienten als Matrixeinträgen und b bezeichne den Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

der aus der rechten Seite des Gleichungssystem gebildet wird. Dann lässt sich das LGS schreiben als:

$$A \cdot x = b.$$

3.3.3 Gauss-Algorithmus

Der Gauss-Algorithmus ist ein systematisches Lösungsverfahren, mit dem sich jedes (beliebig grosse) LGS lösen lässt, zumindest in der Theorie. In der Praxis, in der LGS riesig werden können, muss man sich etwas noch Klügeres einfallen lassen, weil man Probleme mit der Rechenzeit und dem Speicherplatz bekommt.

Gauss-Algorithmus: Idee

Das letzte Beispiel zeigt, dass wir LGS in Dreiecksform (genauer: in **Zeilenstufenform**) einfach durch Rückwärtseinsetzen lösen können.

Idee Gauss-Algorithmus: Beliebiges LGS in diese Zeilenstufenform bringen, ohne dabei die Lösungsmenge zu verändern.

Satz: Die folgenden Zeilenoperationen ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht.

- Zeilen (Gleichungen) dürfen vertauscht werden. → manchmal notwendig
- Zeilen (Gleichungen) dürfen mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ multipliziert werden.
- Zeilen (Gleichungen) dürfen zueinander addiert werden.

Gauss-Algorithmus: theoretisch

Wir starten mit dem LGS $Ax = b$:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\ \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

1. Eliminationsschritt

- Überprüfe, dass $a_{11} \neq 0$. Wenn nicht, vertausche die 1. Zeile so, dass diese Bedingung erfüllt ist.
- Es ist nun $a_{11} \neq 0$. Das ist das 1. **Pivotelement** und wir machen ein Kästchen um diese Zahl. Addiere $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ mal die 1. Gleichung zu den Gleichungen $j = 2, \dots, m$. Nach diesem ersten Eliminationsschritt hat man ab der 2. Gleichung die Variable x_1 eliminiert.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\ \hline \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m. \end{array}$$

2. Eliminationsschritt

- Überprüfe, dass $\tilde{a}_{22} \neq 0$. Wenn nicht, vertausche die 2. Zeile mit einer *darunter liegenden* Zeile, sodass diese Bedingung erfüllt ist. Falls das nicht möglich ist (d.h. $\tilde{a}_{k2} = 0$ für $k \geq 2$), geht man zum nächsten Eliminationsschritt über.
- Falls $\tilde{a}_{22} \neq 0$ wird es das 2. Pivotelement. Dann addiere $-\frac{\tilde{a}_{j2}}{\tilde{a}_{22}}$ zu den Gleichungen $j = 3, \dots, m$.

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & & x_n & \\ \hline \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \boxed{\tilde{a}_{22}} & \cdots & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3n} & \bar{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{m3} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m. \end{array}$$

Zeilenstufenform

Dieser Prozess wird solange fortgeführt, bis man bei der letzten Zeile angelangt ist. Das Endschema des Gauss-Eliminationsverfahrens ist die sogenannte **Zeilenstufenform**:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & & & & & & & & & & \cdots & x_n & \\ \hline \boxed{*} & * & \cdots & * & \cdots & & & & & & & & \cdots & * & c_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{*} & * & \cdots & & & & & & \cdots & * & c_2 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \boxed{*} & * & \cdots & & & & & \cdots & * & c_3 \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & \boxed{*} & * & \cdots & & & \cdots & * & c_4 \\ 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & \boxed{*} & * & \cdots & & \cdots & * & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & & & \cdots & 0 & \boxed{*} & \cdots\ \cdots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & \cdots & 0 & \boxed{*}\ \cdots & * & c_r \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & & & 0\ \cdots & 0 & c_{r+1} \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & & \cdots & 0\ \cdots & 0 & c_m \end{array}$$

3.3.4 Lösungsmenge von LGS

Def: Wir betrachten das LGS $Ax = b$. Die Anzahl Pivotelemente in der Zeilenstufenform des LGS heisst **Rang des LGS** oder **Rang der Matrix** A und wird mit $\mathrm{rang}(A)$ bezeichnet.

Satz: Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $\mathrm{rang}(A) = r$. Dann gilt:

- r ist gleich der Anzahl Zeilen in der Zeilenstufenform, die nicht Nullzeilen sind.
- Die Zeilenstufenform hat $n - r$ Spalten ohne Pivotelemente. Das lineare Gleichungssystem hat $n - r$ freie Variablen.

Vorgehen: Bestimmung der Lösungsmenge

- Bestimme den Rang des Gleichungssystem $r := \mathrm{rang}(A)$.
- **Frage:** Gibt es Nullzeilen?
  1) nein: Das LGS hat (mindestens) eine Lösung. **Frage:** $n - r = 0$?
     - ja: Das LGS hat genau eine Lösung.
     - nein: Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $n - r$ freien Variablen. $n - r$ ist auch die Dimension des Lösungsraums.
  2) ja. **Frage:** Ist mindestens einer der Werte $c_{r+1}, \dots, c_m$ ungleich Null?
     - ja: Das LGS hat keine Lösung. (Nullzeile mit Widerspruch)
     - nein: Das LGS hat mind eine Lösung. **Frage:** $n - r = 0$?
       I) ja: Das LGS hat genau eine Lösung.
       II) nein: Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $n - r$ freien Variablen. $n - r$ ist auch die Dimension des Lösungsraums.
- Die Lösungsmenge bestimmt man durch Rückwärtseinsetzen beginnend mit der Variablen des untersten Pivotelements.

Kern einer Matrix

homogenes lin. Gleichungssystem: $Ax = 0$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$, $0 \in \mathbb{K}^m$

$\ker(A) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$

Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$

Nullvektor $\vec{0} \in \mathbb{K}^n$ immer $\in \ker(A)$, $x = \vec{0}$ ist immer eine Lösung

entweder genau ein Element $(\vec{0})$ oder unendlich viele

↳ geometrisch zB. Gerade oder Ebene

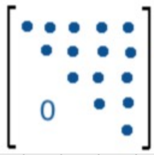
→ muss durch Nullpunkt!

$\dim(\ker(A)) + \operatorname{rang}(A) = n$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

Dreiecksmatrix, Diagonalmatrix

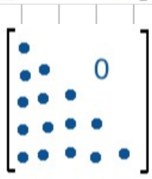
obere Dreiecksmatrix

$n \times n$ Matrix, sodass $u_{ij} = 0$, falls $i > j$



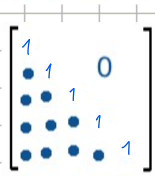
untere Dreiecksmatrix

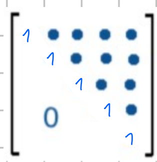
$n \times n$ Matrix, sodass $l_{ij} = 0$, falls $i < j$



unipotente Dreiecksmatrix

Diagonalelemente alle gleich 1





Diagonalmatrix

$n \times n$ Matrix, sodass $d_{ij} = 0$ falls $i \neq j$

LU - Zerlegung

Zeile Zahl Spalte

$I - a \cdot J$

- nicht Zeilen mit Skalar multiplizieren!
- nur Vielfaches der Pivotzeile zu unteren Zeile addieren
- Vielfaches (mit umgekehrten Vorzeichen) in Spalte notieren, deren Nummer mit der Nummer der Pivotzeile übereinstimmt
- falls Zeilenvertauschung notwendig => gleiche Zeilen in I_n vertauschen und notieren (=P)
  ↳ falls mehrere ⇒ bisheriges P erweitern von links: $P = P_{neu} \cdot P_{alt}$

$$PA = LU, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ * & 1 & & \\ \vdots & * & \ddots & \\ * & & \ddots & 1 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ & * & * & \vdots \\ & & \ddots & \\ & 0 & * & * \\ & & & * \end{pmatrix}$$

LGS mit LU:

$$Ax = b$$
$$PAx = Pb$$
$$L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$$
$$Ly = Pb \quad \to \text{nach } y \text{ auflösen (Vorwärtseinsetzen)}$$
$$\Rightarrow Ux = y \quad \to \text{nach } x \text{ auflösen (Rückwärtseinsetzen)}$$

transponierte Matrix

A^T: Spiegelung von A an Diagonale (Zeilen & Spalten vertauschen)

$(A+B)^T = A^T + B^T$
$(\lambda A)^T = \lambda A^T$
$(A^T)^T = A$
$\boxed{(AB)^T = B^T A^T} \neq A^T B^T = (BA)^T$

$\mathbb{R}$

symmetrisch: $A^T = A$

anti-symmetrisch: $A^T = -A$
=> Diagonalelemente alle 0

$\mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$x^T y = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \langle x, y \rangle$

$\mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$

$\langle \underbrace{Ax}_{\in \mathbb{R}^m}, y \rangle = \langle x, \underbrace{A^T y}_{\in \mathbb{R}^n} \rangle$

adjungierte Matrix

A^*: Matrix transponieren und alle Elemente komplex konjugieren

$(A+B)^* = A^* + B^*$
$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
$(A^*)^* = A$
$(AB)^* = B^* A^* \neq A^* B^* = (BA)^*$

$\mathbb{K}$

hermitesch/selbstadjungiert: $A^* = A$
=> Diagonalelemente alle reell (inkl. 0)

anti-hermitesch/anti-selbstadjungiert: $A^* = -A$
=> Diagonalelemente alle rein imaginär (inkl. 0)

$\mathbb{K}$

$w, z \in \mathbb{K}^n$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

$w^* z = (\bar{w}_1 \cdots \bar{w}_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \bar{w}_1 z_1 + \dots + \bar{w}_n z_n = \langle w, z \rangle$

$\mathbb{K}$

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $w \in \mathbb{K}^n$, $z \in \mathbb{K}^m$

$\langle \underbrace{Aw}_{\in \mathbb{K}^m}, z \rangle = \langle w, \underbrace{A^* z}_{\in \mathbb{K}^n} \rangle$

Spur

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{(Summe der Matrixelemente der Diagonale)}$$

Lineare Ausgleichsrechnung

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{N \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^N$, $N > n$

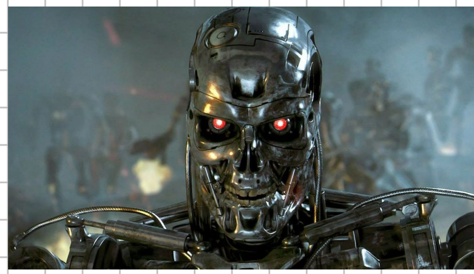
=> überbestimmtes LGS (A hat mehr Zeilen als Spalten ($N > n$))
=> keine Lösung (i. d. R.)

Annäherung:

Normalengleichung: $A^T A \bar{x} = A^T b$, $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$

=> $\bar{x}$ minimiert (quadratischen) Fehler: $\|b - A\bar{x}\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$

Determinante einer Matrix



Eigenschaften der Determinante

Die Determinante von $n \times n$-Matrizen besitzt folgende Eigenschaften

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(U) =$ Produkt der Diagonalelemente, wobei U eine obere Dreiecksmatrix ist.
- $\det(L) =$ Produkt der Diagonalelemente, wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist.
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$

2x2:

Eigenschaften

Für 2×2-Matrizen erfüllt die Determinante die folgenden Eigenschaften:

(i) $\det(\mathbb{1}_2) = \det(e_1, e_2) = 1$

(ii) Die Determinante ist eine sogenannte *2-Form*, d.h.

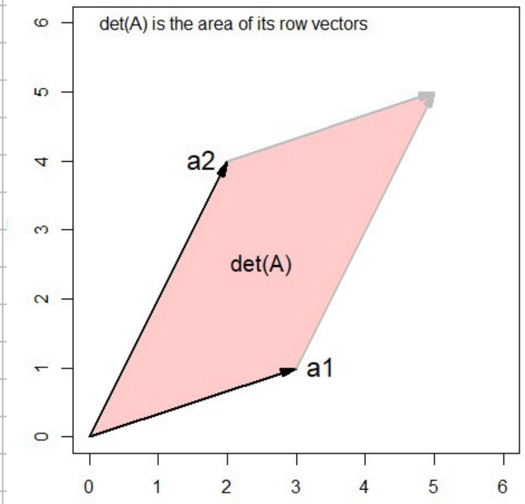
- det ist bilinear:

$$\det(\lambda a_1, a_2) = \lambda \det(a_1, a_2) = \det(a_1, \lambda a_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},$$
$$\det(a_1 + b_1, a_2) = \det(a_1, a_2) + \det(b_1, a_2), \quad \forall a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{K}^2$$
$$\det(a_1, a_2 + b_2) = \det(a_1, a_2) + \det(a_1, b_2), \quad \forall a_1, a_2, b_2 \in \mathbb{K}^2$$

- det ist alternierend:

$$\det(a_1, a_2) = -\det(a_2, a_1)$$

(iii) Für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ entspricht $|\det(A)| = |\det(a_1, a_2)|$ der Fläche des von a_1 und a_2 aufgespannten Parallelogramms.



$$\det(A) = \det(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Orientierung a_1 & a_2:

$\det(A) > 0 \Rightarrow$ Gegenuhrzeigersinn

$\det(A) < 0 \Rightarrow$ Uhrzeigersinn

3x3:

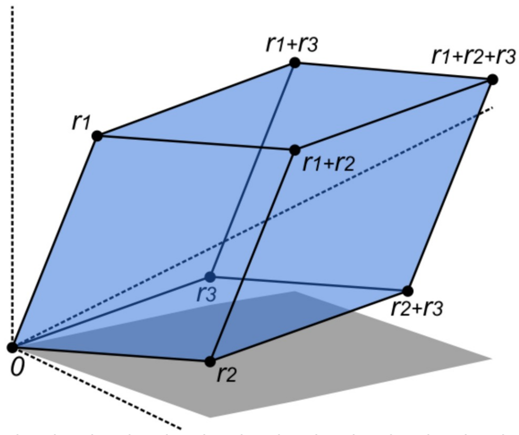
Eigenschaften

Für 3×3-Matrizen erfüllt die Determinante die folgenden Eigenschaften:

(i) $\det(\mathbb{1}_3) = \det(e_1, e_2, e_3) = 1$

(ii) Die Determinante ist eine sogenannte *3-Form*

(iii) Für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ entspricht $|\det(A)| = |\det(a_1, a_2, a_3)|$ dem Volumen des von a_1, a_2 und a_3 aufgespannten Spats.

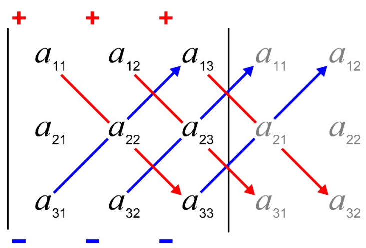


$$\det(A) = \det(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := (a_1 \times a_2) \cdot a_3$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus

Für 3×3-Matrizen gibt es ein Schema (Regel von Sarrus), um die Determinante zu berechnen. Diese Regel funktioniert folgendermassen:



Die Anwendung der Regel von Sarrus liefert:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$n \times n$:

Def: (Determinante für $n \times n$-Matrizen) Für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ bestehend aus den Spaltenvektoren a_i definieren wir die Determinante über die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Determinante ist normiert: $\det(\mathbb{1}_n) = 1$.

(ii) Die Determinante ist multilinear:

$$\det(a_1, \dots, a_i + \tilde{a}, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, \tilde{a}, \dots, a_n)$$
$$\det(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) = \lambda \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

(iii) Die Determinante ist alternierend:

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad \text{(Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte)},$$
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)}$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Berechnung der Determinante mittels *LU*-Zerlegung

Die obigen Eigenschaften liefern eine weitere Möglichkeit, wie man die Determinante von $n \times n$-Matrizen berechnen kann:

Wir führen bei der Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die LU-Zerlegung durch

$$P \cdot A = L \cdot U \quad | \det$$

Wegen $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ folgt:

$$\det(P) \cdot \det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

oder

$$\det(A) = \det(L) \cdot \frac{\det(U)}{\det(P)}$$
$$= \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(L) \cdot \det(U)$$

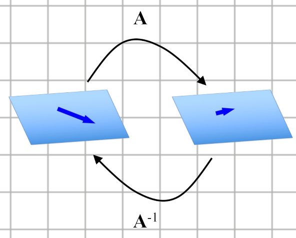
aber: $\det(L) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{vmatrix} = 1$

und $\det(U) = \begin{vmatrix} u_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} u_{jj}$

$\det(P) = (-1)^p$ wobei p die Anzahl Zeilenvertauschungen.

$\Rightarrow \boxed{\det(A) = (-1)^p \det(U)}$

Inverse einer Matrix



Begriffe für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

regulär: $\operatorname{rang}(A) = n$ (Anzahl Pivotelemente $= n$)

singulär: nicht regulär

invertierbar: es existiert A^{-1}, sodass $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$

$$\boxed{A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow A \text{ regulär} \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n \Leftrightarrow \ker(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0}$$

Eigenschaften

- Normalerweise ist das Produkt zweier Matrizen nicht kommutativ: $AB \neq BA$. Wir fordern aber $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_n$. Das heisst, A und A^{-1} kommutieren.
- Die Inverse A^{-1} ist eindeutig. Eine Matrix A kann nicht zwei verschiedene Inversen haben.
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
- $\boxed{\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}}$
- Seien A, B beide invertierbar. Dann ist auch AB invertierbar:

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}} \neq A^{-1}B^{-1}$$

Matrixgruppen

Invertierbare Matrizen:

General linear group: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \left\{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\right\}$

Unimodulare Matrizen (volumenerhaltend):

Special linear group: $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \left\{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det(A) = 1\right\} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$

Drehspiegelungsmatrizen/Rotationsmatrizen:

Orthogonal group: $O(n) = \left\{R \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid R^T R = \mathbb{1}_n\right\} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

Sp. orthogonal gr.: $SO(n) = \left\{R \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid R^T R = \mathbb{1}_n \wedge \det(R) = 1\right\} \subseteq O(n)$

Unitäre Matrizen:

Unitary group: $U(n) = \left\{U \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid U^* U = \mathbb{1}_n\right\} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Sp. unitary gr.: $SU(n) = \left\{U \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid U^* U = \mathbb{1}_n \wedge \det(U) = 1\right\} \subseteq U(n)$

Berechnung:

Gauss-Jordan Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$ (Zeilenoperationen)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \boxed{1} & & \vdots & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

2x2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

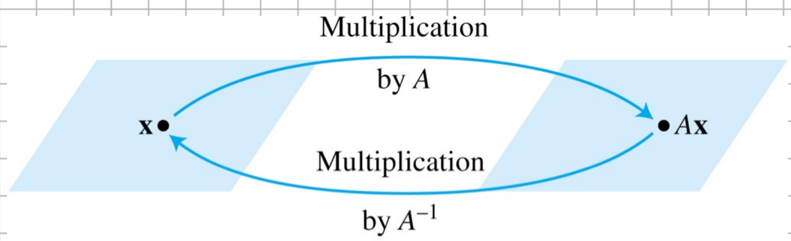
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse als Funktion:

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$x \mapsto y = Ax$$

$$A^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$y \mapsto x = A^{-1}y = A^{-1}Ax$$

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion von A



A^{-1} transforms $A\mathbf{x}$ back to $\mathbf{x}$.

LGS mit Inverser lösen:

$$Ax = y \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}y \Rightarrow x = A^{-1}y$$

Vektorräume

5.1 Vektorräume

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist eine Menge V mit einer Addition $+$, die zwei Vektoren $u, v \in V$ den Vektor $u + v \in V$ zuordnet und einer Skalarmultiplikation $\cdot$, die einem $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ den Vektor $\lambda \cdot v \in V$ zuordnet.

- Die Addition $+$ erfüllt folgende Eigenschaften:
  - i) Assoziativität: $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$
  - ii) Existenz des Nullvektors: $\exists\, 0 \in V: \ v + 0 = v \quad \forall v \in V$
  - iii) Existenz des Negativen: $\forall v \in V\ \exists -v \in V: \quad v + (-v) = 0$
  - iv) Kommutativität: $v + w = w + v \quad \forall v, w \in V$
- Die Skalarmultiplikation $\cdot$ erfüllt folgende Eigenschaften:
  - v) Assoziativität: $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda(\mu \cdot v) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad v \in V$
  - vi) Neutralität der Eins: $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$
- Schliesslich sind noch folgende zwei Distributivgesetze erfüllt:
  - vii) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ v, w \in V$
  - viii) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \forall v \in V, \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Beispiel 1

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_k \in \mathbb{R} \right\}$$

erfüllt alle Vektorraum-Axiome, was wir in LinAlg 1 bereits gesehen haben. Damit ist der $\mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Analog ist $\mathbb{C}^n$ ein $\mathbb{C}$-VR.

Beispiel 2

Auch die Menge der $m \times n$-Matrizen, $V = \mathbb{R}^{m \times n}$, ist mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation für Matrizen ein Vektorraum.

Beispiel 3

Die Menge der Polynome vom Grad ≤ 2, also die Menge

$$P_2 := \left\{ p(x) \,\middle|\, p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

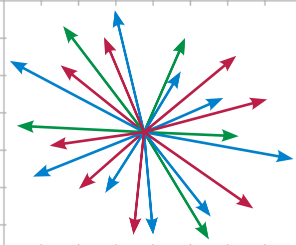
ist zusammen mit der üblichen Addition von Polynomen und der Skalarmultiplikation ein Vektorraum.

Beispiel 4

Analog ist die Menge der Polynom vom Grad $\leq n$:

$$P_n := \left\{ p(x) \,\middle|\, p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \ a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Vektorraum.



5.2 Unterräume

Ein Unterraum U ist eine Teilmenge eines Vektorraums V, die selbst auch wieder ein Vektorraum ist. Glücklicherweise müssen die 8 VR-Axiome nicht überprüft werden, da sie vom Vektorraum V "geerbt" werden. Man muss nur sicherstellen, dass man durch Rechnen nicht aus der Menge U "rausfällt" (man sagt, U ist **abgeschlossen** bzgl. $+$ und $\cdot$).

Def: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine nicht-leere Teilmenge $U \subset V$ heisst **Unterraum** von V, wenn U die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:

i) $u, v \in U \quad \Rightarrow \quad u + v \in U$

ii) $\lambda \in \mathbb{K}, u \in U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$

Damit eine Teilmenge $U \subset V$ ein Unterraum sein kann, muss immer der Nullvektor in U liegen!

Grund: sonst wären Axiome ii) und iii) verletzt!

Überprüfen Sie also zuerst, ob $0 \in U$.
- falls nein: U ist kein Unterraum
- falls ja: U ist möglicherweise ein Unterraum, man muss i) und ii) in obiger Definition überprüfen

Beispiel 1

In $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ (Menge der $n \times n$-Matrizen) betrachten wir die Teilmenge

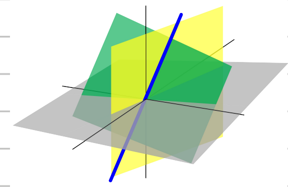
$$U = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \,\middle|\, A^T = A \right\}.$$

Beispiel 2

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine beliebige gegebene $m \times n$-Matrix. Dann ist der Kern dieser Matrix

$$\ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax = 0 \right\}$$

ein Unterraum von $V = \mathbb{R}^n$.



Im dreidimensionalen euklidischen Raum bilden alle Ursprungsebenen und Ursprungsgeraden Untervektorräume.

5.3 Lineare Unabhängigkeit

Linearkombination

Def 5.3.1: Sei V ein VR. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ beliebige Vektoren aus V und $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ beliebige Skalare. Dann nennt man den Vektor

$$\boxed{v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V}$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$.

Beispiele:

1) $V = \mathbb{R}^3$. Seien

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Eine Linearkombination von a und b ist z.B. der Vektor

$$-\frac{2}{3}a + 2b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

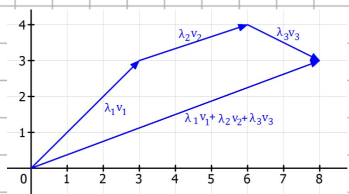
2) Quadratische Polynome $V = P_2$. Seien

$$p_1(x) = 3, \qquad p_2(x) = x^2, \qquad p_3(x) = -2x$$

drei Polynome in P_2. Dann ist z.B.

$$5p_1(x) + 2p_2(x) - p_3(x) = 15 + 2x + 2x^2$$

eine Linearkombination von $p_1(x)$, $p_2(x)$ und $p_3(x)$.



Lineare Unabhängigkeit

Anschaulich: Durch das Bilden von Linearkombinationen erhält man eine Menge von linear abhängigen Vektoren, da die Linearkombination nicht in eine neue "Dimension" zeigt. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots v_n$ sind deshalb genau dann linear unabhängig, falls sich keiner dieser Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt.

Def 5.3.7: Sei V ein VR. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sind **linear unabhängig**, falls folgendes gilt:

$$\boxed{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0}$$

Sonst sind die Vektoren linear abhängig.

Beispiele:

1) Seien

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Sind diese Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig? Wir stellen zuerst einmal fest, dass einer der beiden Fälle eintreten muss, ein Zwischendings zwischen linearer Abhängigkeit und Unabhängigkeit gibt es nicht. Wir müssen das homogene lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$$

oder eben

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

lösen. Wir wissen aus dem Abschnitt 3.3.5, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sicher eine Lösung ist. a und b sind genau dann linear unabhängig, wenn dies die einzige Lösung ist. Gibt es noch andere Lösungen, dann sind sie linear abhängig. Wir lösen also

$$\begin{array}{cc|} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \hline 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc|} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \hline \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 \end{array}$$

Der Rang des Gleichungssystems ist 2, d.h. es gibt nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, die Vektoren sind linear unabhängig.

Rezept

Sind die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig oder linear unabhängig?

- Schreibe die n Vektoren als Spalten $\boxed{\dim(\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)) = r}$
- Gauss-Algorithmus
- Hat man maximalen Rang (d.h. gilt $r = n$)?
  - Falls ja: Die Vektoren sind linear unabhängig.
  - Falls nein: Die Vektoren sind linear abhängig. Relevant für das Thema Basis von kommender Woche: Durch Streichen der Vektoren ohne Pivots erhält man eine grösstmögliche Teilmenge an linear unabhängigen Vektoren. Basis: ursprüngliche Vektoren der Spalten mit Pivot

3) Betrachten wir noch einmal die Polynome

$$p_1(x) = 3, \qquad p_2(x) = x^2, \qquad p_3(x) = -2x$$

im Vektorraum P_2. Sind diese linear unabhängig? Hier müssen wir die Gleichung

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 \cdot (-2x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

betrachten. Weil diese Gleichung $\forall x \in \mathbb{R}$ gelöst werden soll, können wir für x irgendwelche Werte auswählen:

$$\begin{aligned} x = 0 &: \ 3\lambda_1 = 0 \\ x = -1 &: \ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ x = 1 &: \ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt sofort, dass $\lambda_1 = 0$ sein muss. Dann liefern die beiden anderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -2\lambda_3 \\ \lambda_2 &= 2\lambda_3. \end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Gleichung ist klar, dass auch $\lambda_2 = 0$. Dies hat dann aber auch $\lambda_3 = 0$ zur Folge. Dies ist die einzige mögliche Lösung, die drei Polynome sind linear unabhängig.

Lineare Hülle (= Span)

Def 5.3.2: Sei V ein VR und $v_1, \ldots, v_n \in V$ beliebige Vektoren in V. Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$

$$\boxed{\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) := \left\{ v \in V \middle| v = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n \right\}}$$

heisst die **lineare Hülle** von $v_1, \ldots, v_n$. Dimension

Anschaulich: Man kann sich die lineare Hülle als eine Art "Tuch" (unendlich gross) vorstellen, dieses Tuch hüllt man um die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$. Alles, was nun in diesem Tuch enthalten ist, ist die lineare Hülle von $v_1, \ldots, v_n$.

Satz 5.3.3: Die lineare Hülle $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein Unterraum von V.

Beispiele:
Wir untersuchen fast noch einmal die gleichen Beispiele wie vorher zu den Linearkombinationen:

1) Seien wieder

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

- Die von diesen Vektoren aufgespannte lineare Hülle ist offensichtlich die Ebene

$$E = \operatorname{span}(a, b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = sa + tb, \ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Nach Satz 5.3.3 ist E ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Dies sieht man auch daran, dass es sich um eine Ebene durch den Nullpunkt handelt.
- Fügen wir zu den Vektoren a und b noch den Vektor

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3a + b$$

  hinzu. Was ist die lineare Hülle von a, b und c? Da c eine Linearkombination von a und b ist, also c in der von a und b aufgespannten Ebene liegt, "gewinnt" man mit dem Vektor c nichts dazu, es gilt:

$$\operatorname{span}(a, b, c) = \operatorname{span}(a, b) = E.$$

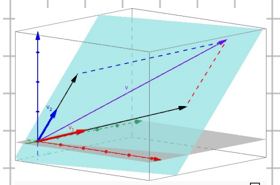
  Die drei Vektoren a, b und c spannen also immer noch bloss die Ebene E auf.
- Hätten wir stattdessen z.B. den Vektor

$$\widehat{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  genommen, dann erhielten wir

$$\operatorname{span}(a, b, \widehat{c}) = \mathbb{R}^3,$$

  denn $\widehat{c} \notin E$.



Die grüne Ebene stellt die lineare Hülle der beiden Vektoren v_1 und v_2 dar. (v ist eine Linearkombination der beiden Vektoren.)

Erzeugendensystem

Def 5.3.4: Sei V ein Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heissen **Erzeugendensystem** von V, falls sie den gesamten VR V aufspannen:

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = V$$

Satz 5.3.5: Sei V ein VR. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann ein Erzeugendensystem, falls sich *jeder* Vektor $v \in V$ als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ ausdrücken lässt:

$$\forall v \in V \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n : \ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Beispiel 1

Die Vektoren $1, x, x^2$ sind ein Erzeugendensystem von $V = P_2$.

Beispiel 2

Auch die Vektoren $1, x, 2x + 2, x^2$ sind ein Erzeugendensystem von $V = P_2$.

Beispiel 3

Eine beliebige antisymmetrische 3×3-Matrix ist immer von der Form

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also bilden die drei Matrizen

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ein Erzeugendensystem des Unterraums der antisymmetrischen Matrizen.

5.4 Basis und Dimension

Def 5.4.1: Seien V ein VR und $\mathcal{B} \subseteq V$ eine Teilmenge von V. $\mathcal{B}$ heisst **Basis** von V, falls

(i) $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.
(ii) $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von V ist, d.h. $\operatorname{span}(\mathcal{B}) = V$.

Standardbasis, Dimension

Die n Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden die sogenannte **Standardbasis** des $\mathbb{R}^n$.

Def 5.4.7: Die **Dimension** eines VR ist die Anzahl Vektoren der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V:

$$\dim(V) = n$$

Satz 5.5.1: Jeder VR besitzt eine Basis.

Beispiel 1

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ ist eine Basis von $V = \mathbb{R}^2$. Aber auch die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

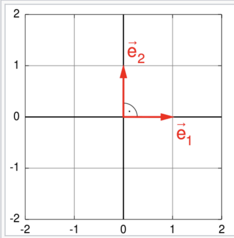
bilden eine Basis $\widetilde{\mathcal{B}} = \{b_1, b_2\}$ vom $\mathbb{R}^2$!

Beispiel 2

$V = P_2$ (Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2). Dann bilden

$$p_1(x) = 1, \qquad p_2(x) = x, \qquad p_3(x) = x^2$$

eine Basis von P_2. Der VR P_2 ist also 3-dimensional!



Standardbasisvektoren in der euklidischen Ebene

1. **Basis des $\mathbb{R}^3$**

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und drücken Sie den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination von $\{b_1, b_2, b_3\}$ aus.

Wir lösen das lineare Gleichungssystem

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3,$$

also

$$\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 11 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{array}$$

Wir führen den Gauss-Algorithmus durch, wobei wir als Erstes die ersten beiden Zeilen vertauschen:

$$\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 11 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 11 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & -16 \\ 0 & 7 & -3 & -38 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 11 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & -16 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}$$

Der Rang des Gleichungssystem ist 3. Das bedeutet, dass die drei Vektoren b_1, b_2 und b_3 linear unabhängig sind. Damit spannen sie den ganzen $\mathbb{R}^3$ auf und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Die Lösung für λ_1, λ_2 und λ_3 liefert uns die gesuchte Linearkombination:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 1 \\ 3\lambda_2 &= -16 + \lambda_3 = -15 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -5 \\ \lambda_1 &= 11 - 2\lambda_3 + \lambda_2 = 4. \end{aligned}$$

Die gesuchte Linearkombination ist somit

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = 4b_1 - 5b_2 + b_3.$$

Bemerkung: Man sagt auch, dass

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$.

Koordinatenvektor

Seien V ein VR und $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann kann jeder Vektor $v \in V$ **eindeutig** in der Form

$$\boxed{v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n}$$

dargestellt werden.
Es besteht eine eindeutige Beziehung zwischen $v \in V$ und dem **Koordinatenvektor**

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n}$$

Bemerkung: Die Darstellung eines Vektors v als Koordinatenvektor hängt von der Wahl der Basis und der Reihenfolge der Basisvektoren ab.

Beispiel:
Wir betrachten in P_2 das Polynom

$$p(x) = 6 - 2x - 2x^2.$$

und wählen die Basis $\{p_1, p_2, p_3\}$, wobei

$$p_1(x) = 1, \qquad p_2(x) = x, \qquad p_3(x) = x^2.$$

Diese Polynom ist als Linearkombination in dieser Basis gegeben durch

$$p(x) = 6p_1(x) - 2p_2(x) - 2p_3(x).$$

Damit kann dieses Polynom als Koordinatenvektor im $\mathbb{R}^3$ verstanden werden, also

$$\widetilde{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Man beachte, dass die Schreibweise als Koordinatenvektor von der Wahl der Basis abhängt. Wählen wir z.B. die Basis $\{q_1, q_2, q_3\}$ mit

$$q_1(x) = 3, \qquad p_2(x) = x^2, \qquad p_3(x) = -2x.$$

Dann gilt:

$$p(x) = 2q_1(x) - 2q_2(x) + 1q_3(x).$$

Bezüglich der Basis $\{q_1, q_2, q_3\}$ schreiben wir also den Koordinatenvektor

$$\widehat{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

5.6 Vektorräume mit Skalarprodukt

Definition Norm

Def 5.6.1: Sei V ein VR. Eine **Norm** ist eine Abbildung $V \longrightarrow [0, \infty[$ (d.h. jedem Vektor wird eine positive Zahl, die "Länge", zugeordnet), welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) **absolut homogen**:

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|, \quad \forall v \in V, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

(ii) **subadditiv** (Dreiecksungleichung):

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad \forall v, w \in V$$

(iii) **definit**:

$$\|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

Ein VR V, der mit einer Norm versehen wurde, heisst **normierter Vektorraum**.

Normen

Auf den Räumen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ kennen wir bereits die sog. **Euklidische Norm**

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Auf dem $\mathbb{K}^n$ ist durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

für ein gegebenes festes $1 \leq p < \infty$ jeweils eine Norm definiert.

Auf dem $\mathbb{K}^n$ definiert auch

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \, .$$

eine Norm. Diese Norm entspricht also einfach dem betragsmässig grössten Eintrag im Vektor.

Auf dem Vektorraum der Matrizen $\mathbb{K}^{m \times n}$ definiert man die folgenden Normen:

- Frobenius-Norm:

$$\boxed{\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}}$$

- Zeilensummennorm

$$\boxed{\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$$

- Spaltensummennorm

$$\boxed{\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|}$$

Für einen festen Definitionsbereich $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{K}$ definiert man den (reellen oder komplexen) Vektorraum

$$L^p(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \int_{\mathbb{D}} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

mit der Norm

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Definition Skalarprodukt (reeller VR)

Def. 5.6.2: Ein **Skalarprodukt** ist eine Abbildung, die zwei Vektoren ein Skalar (in $\mathbb{R}$) zuordnet, wobei die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) bilinear
- $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle \quad \forall v_1, v_2, w \in V, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $\langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle = \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle \quad \forall v, w_1, w_2 \in V, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(ii) symmetrisch

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in V$$

(iii) positiv definit

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V,$$
$$\langle v, v \rangle = 0, \quad \Leftrightarrow \quad v = 0.$$

Einen $\mathbb{R}$-VR versehen mit einem Skalarprodukt heisst **euklidischer** VR.

Definition Skalarprodukt (komplexer VR)

Ein **Skalarprodukt** ist eine Abbildung, die zwei Vektoren ein Skalar (in $\mathbb{C}$) zuordnet, wobei die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) sesquilinear
- $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \overline{\lambda_1} \langle v_1, w \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v_2, w \rangle \quad \forall v, w_1, w_2 \in V, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
- $\langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle = \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle, \quad \forall v_1, v_2, w \in V, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

(ii) hermitesch

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad \forall v, w \in V$$

(iii) positiv definit

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V,$$
$$\langle v, v \rangle = 0, \quad \Leftrightarrow \quad v = 0.$$

Ein $\mathbb{C}$-VR versehen mit einem Skalarprodukt heisst **unitärer** VR.

1. **Matrixnormen**

Es sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -6i \\ -3 & 3-4i \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie $\|M\|_F$, $\|M\|_1$ und $\|M\|_\infty$.

b) Berechnen Sie $\mathrm{tr}(M^*M)$. Was stellen Sie fest?

a)

$$\|M\|_F = \sqrt{|1|^2 + |-6i|^2 + |-3|^2 + |3-4i|^2} = \sqrt{1+36+9+25} = \sqrt{71} \approx 8.426,$$
$$\|M\|_1 = \max\left\{|1| + |-3|, |-6i| + |3-4i|\right\} = \max\left\{4, 11\right\} = 11,$$
$$\|M\|_\infty = \max\left\{|1| + |-6i|, |-3| + |3-4i|\right\} = \max\left\{7, 8\right\} = 8$$

b) Wir finden:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6i & 3+4i \end{pmatrix},$$
$$M^*M = \begin{pmatrix} 10 & -9+6i \\ -9-6i & 61 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{tr}(M^*M) = 71$$

Zuerst einmal sehen wir, dass M^*M hermitesch ist, d.h.

$$(M^*M)^* = M^*M.$$

Dies gilt für jede Matrix. Zweitens finden wir, dass

$$\mathrm{tr}(M^*M) = 71 = \|M\|_F^2$$

Dies ist der allgemeine Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt und der durch dieses Skalarprodukt induzierten Norm:

$$\langle M, N \rangle := \mathrm{tr}(M^*N),$$
$$\|M\|_F = \sqrt{\langle M, M \rangle}.$$

Beispiele:

1) Das Paradebeispiel, welches als Modell für die obigen Definition diente, ist das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. auf dem $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle \equiv x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$
$$\langle w, z \rangle \equiv w \cdot z := \sum_{i=1}^{n} \overline{w_i} z_i \quad w, z \in \mathbb{C}^n.$$

Das kennen wir schon. Beachten Sie, dass das Standardskalarprodukt und die Standardnorm zusammengehören und über die Formel

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

miteinander verknüpft sind. Mehr dazu weiter unten.

2) Die Menge der Matrizen $\mathbb{K}^{m \times n}$, egal ob reell oder komplex, ist ja auch ein Vektorraum (und zwar ein $m \cdot n$-dimensionaler). Ein Skalarprodukt auf den Matrizen kann man durch

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}\left(A^T B\right), \quad A, B \in \mathbb{R}^{m \times n},$$
$$\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}\left(A^* B\right), \quad A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

Ist das wirklich ein Skalarprodukt? Überprüfen wir dies (für den komplexen Fall):

- Wir schauen nur die Semilinearität in der 1. Komponente an:
$$\langle \lambda A, B \rangle = \mathrm{tr}\left((\lambda A)^* B\right) = \mathrm{tr}(\overline{\lambda} A^* B) = \overline{\lambda} \mathrm{tr}(A^* B) = \overline{\lambda} \langle A, B \rangle$$
- Die Spur einer Matrix hat die Eigenschaft, dass $\mathrm{tr}(A) = \overline{\mathrm{tr}(A^*)}$. Aus dieser Eigenschaft folgt, dass
$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^* B) = \overline{\mathrm{tr}((A^* B)^*)} = \overline{\mathrm{tr}(B^* A)} = \overline{\langle B, A \rangle}.$$
- Ist $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, dann ist AA^* eine hermitesche $m \times m$-Matrix. Es gilt:
$$\langle A, A \rangle = \mathrm{tr}(A^* A) = \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \geq 0.$$
Offensichtlich ist also $\langle A, A \rangle = \|A\|_F^2$ – auch das Skalarprodukt für Matrizen hat seine zugehörige Norm.

3) Auf dem Vektorraum P_n der Polynome vom Grad $\leq n$ definiert das Integral

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx$$

ein Skalarprodukt.

Skalarprodukte

Wir haben in LinAlg1 das Standardskalarprodukt definiert:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle w, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{w_i} z_i \quad w, z \in \mathbb{C}^n.$$

Auf $\mathbb{K}^{m\times n}$ (VR der $m \times n$-Matrizen) definiert man das Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}\left(A^T B\right), \quad A, B \in \mathbb{R}^{m\times n},$$
$$\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}\left(A^* B\right), \quad A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

Im Vektorraum $L^2(\mathbb{D})$ (hier als $\mathbb{C}$-VR aufgefasst) definiert man das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{D}} \overline{f(x)} g(x) dx$$

Induzierte Norm

Falls in einem VR V ein Skalarprodukt definiert ist, so hat man automatisch eine Norm definiert durch

$$\boxed{\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}}$$

Dies nennt man durch das Skalarprodukt **induzierte** Norm. Ist auf V ein Skalarprodukt definiert, so verwendet man immer die induzierte Norm.

Beziehung zwischen Standardnorm und Standardskalarprodukt

Die Norm eines Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ ergibt sich aus dem Skalarprodukt, denn aus der Definition der Norm folgt:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
$$\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} z_i} = \sqrt{\langle z, z\rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

Also gilt für einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{K}^n$: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Für den Vektorraum der Matrizen $\mathbb{K}^{m\times n}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^* B)$$

ist die zugehörige Norm die Matrixnorm

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Für den Raum $L^2(\mathbb{R})$ ist die vom Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx$$

induzierte Norm die L^2-Norm

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx}$$

2. **Polynome**

Im Vektorraum P_3 der Polynome vom Grad ≤ 3 mit dem Skalarprodukt

$$\langle p(x), q(x)\rangle := \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx$$

seien die beiden Polynome

$$p(x) = x^3, \quad \text{und,} \quad q(x) = x$$

gegeben.

a) Berechnen Sie $\|p(x)\|$, wobei $\|\cdot\|$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm bezeichne.
b) Berechnen Sie den Zwischenwinkel α zwischen $p(x)$ und $q(x)$.

a) Wir erhalten

$$\|p(x)\| = \sqrt{\langle p(x), p(x)\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} p^2(x) dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^6 dx} = \sqrt{\frac{x^7}{7}\Big|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{1}{7} - \frac{-1}{7}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

b) Wir nehmen die Formel für den Zwischenwinkel

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\langle p, q\rangle}{\|p\| \|q\|}\right).$$

Das Skalarprodukt ist

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.$$

Die beiden Normen sind

$$\|p\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^6 dx} = \sqrt{\frac{x^7}{7}\Big|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{7}},$$
$$\|q\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

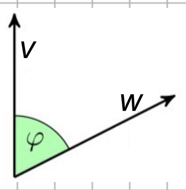
Wir bekommen also schliesslich

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{\frac{2}{7}}\sqrt{\frac{2}{3}}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right) \approx 0.41157 = 23.6°.$$

Öffnungswinkel

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und $v, w \in V$ zwei Vektoren in V. Wir definieren den Winkel φ zwischen zwei Vektoren v und w durch die Formel

$$\boxed{\varphi = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \|w\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\sqrt{\langle v, v\rangle}\sqrt{\langle w, w\rangle}}\right)}.$$



5.6.3 Orthonormalbasen (ONB)

Def 5.6.7: Sei V ein VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zwei Vektoren $v, w \in V$ heissen **orthogonal** oder **rechtwinklig**, falls

$$\langle v, w\rangle = 0.$$

Def 5.6.8: Sei V ein VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Eine Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ heisst **Orthonormalbasis**, falls die Basisvektoren paarweise orthogonal zueinander sind und alle Norm 1 haben, d.h.

$$\boxed{\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}}$$

Beispiel

Nehmen wir den $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt. Dann ist die Standardbasis eine ONB:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Würde man im $\mathbb{R}^3$ ein anderes Skalarprodukt ($\rightarrow$ anderes Mass für Winkel) definieren, dann wäre $\{e_1, e_2, e_3\}$ keine ONB mehr.

Warum sind ONB toll?

Kor. 5.6.10: Jeder endlich-dimensionale VR V mit einem Skalarprodukt besitzt eine orthonormierte Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Bezüglich dieser ONB ist ein beliebiger Vektor $v \in V$ gegeben durch

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, v\rangle e_i$$

d.h. $\langle e_i, v\rangle$ sind die Koordinaten von v bezüglich der ONB.

Hat man also eine orthonormierte Basis in einem Vektorraum, dann muss man, um die Koordinaten eines Vektors bezüglich dieser Basis zu finden, kein lineares Gleichungssystem lösen, sondern man muss nur die Skalarprodukte des Vektors mit den Basisvektoren ausrechnen.

Beispiel

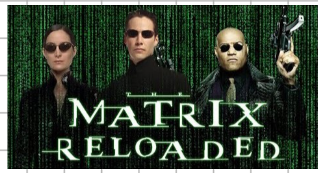
$$P_2 = \left\{p(x) \middle| p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \, a_k \in \mathbb{R}, \, k = 0, 1, 2\right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx$$

Die Standardbasis $\{1, x, x^2\}$ ist *keine* ONB bezüglich dieses Skalarproduktes.

Lineare Abbildungen und Matrizen



6.1 Lineare Abbildungen

Def. 6.1.1: Seien V und W zwei VR. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} f: V &\longrightarrow W, \\ v &\longmapsto w = f(v) \end{aligned}$$

heisst **linear**, falls f folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in V$

ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v) \qquad \forall v \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Matrix als lineare Abbildung

Jede $m \times n$-Matrix kann als lineare Abbildung aufgefasst werden:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ x &\longmapsto y = A \cdot x \end{aligned}$$

Drehmatrizen

- Matrizen, welche Drehungen (Drehspiegelungen) beschreiben, müssen aus orthonormierte Spaltenvektoren aufgebaut sein, weil bei einer Drehung eine orthonormierte Basis auf eine andere orthonormierte Basis abgebildet wird.
- Die Determinante von orthogonalen Matrizen ist ± 1, weil bei einer Drehung ändert sich der Volumeninhalt nicht.
- Bei Determinante gleich 1 handelt es sich um reine Drehungen (spezielle orthogonale Matrizen $SO(n)$).
- Bei Derminante -1 ändert sich die Orientierung (Spiegelung).

Zum Beispiel muss die Matrix D eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ sein:

$$D = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 9 & 4 & 48 \\ 32 & 36 & -9 \\ -36 & 33 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Spalten von D sind orthonormiert, $\det(D) = +1$)

Differentiation als lineare Abbildung

Die Ableitung von Funktionen ist eine lineare Abbildung. Wir wählen z.B. $V = P_4$, $W = P_3$ und definieren

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}: P_4 &\longrightarrow P_3 \\ p(x) &\longmapsto p'(x), \end{aligned}$$

Die Summenregel besagt nämlich, dass

$$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x), \quad \forall p(x), q(x) \in P_2$$

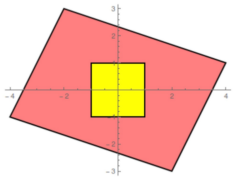
und ebenso ist

$$(\lambda p(x))' = \lambda p'(x) \quad \forall p(x) \in P_2, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Das sind aber genau die beiden Eigenschaften, die für die Linearität einer Abbildung erfüllt sein müssen.

Beispiel: Linear $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Geometrisch: Was macht die Matrix A? Wir untersuchen, was die Matrix A mit einem Quadrat, gegeben durch $P(1|1)$, $Q(-1|1)$, $R(-1|-1)$ und $S(1|-1)$ anstellt: Wir bekommen:



$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Das Quadrat wird also durch die Matrix zu einem Parallelogramm verzerrt und gedreht. Ausserdem hat sich der Umlaufsinn verändert. Gerade Strecken werden niemals gekrümmt, sondern bleiben gerade. Matrizen beschreiben Streckungen, Drehungen, Spiegelungen, Projektionen, Scherungen.

Beispiel: Nicht linear

Ein Beispiel einer Abbildung, die *nicht* linear ist, ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn wir nämlich erstens

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

berechnen und zweitens

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

dann sehen wir, dass wir nicht dasselbe bekommen (in der 1. Komponente). Somit kann g nicht linear sein.

6.2 Matrix einer linearen Abbildung

Jede $m \times n$-Matrix A kann man als lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \longmapsto y = Ax$ auffassen. Umgekehrt kann jeder beliebige linearen Abbildung $f: V \longrightarrow W$ (zwischen endlich-dimensionalen VR) eine Matrix zugeordnet werden!

Rezept: Aufstellen der Matrix

Kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f \text{ linear}} & W \\ {\scriptstyle B_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B_W} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{K}^{m \times n}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

- Nehme die Basisvektoren aus B_V
- Wende die Abbildung f auf diese Basisvektoren an
- Schreibe das Ergebnis als Koordinatenvektor bzgl. der Basis B_W
- Schreibe diese Vektoren sukzessive als Spalten in die Matrix A

Beispiel:
Seien P_2 der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 und P_1 der $\mathbb{R}$-Vektorraum der linearen Polynome. Die Ableitung ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}: P_2 &\longrightarrow P_1 \\ p(x) &\longmapsto p'(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{P_2} &= \{1, x, x^2\} \quad \text{Basis von } P_2 \\ B_{P_1} &= \{1, x\} \quad \text{Basis von } P_1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{\frac{d}{dx} \text{ linear}} & P_1 \\ {\scriptstyle B_{P_2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B_{P_1}} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$(1)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x.$$

Die erste Spalte der Matrix A ist somit der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die weiteren Basisvektoren ergeben:

$$\begin{aligned} (x)' &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x, \\ (x^2)' &= 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x \end{aligned}$$

Die Matrix A der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}: P_2 &\longrightarrow P_1 \\ p(x) &\longmapsto p'(x). \end{aligned}$$

bezüglich der Basen B_{P_2} und B_{P_1} ist demnach

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.3 Verkettung von linearen Abbildungen und Matrixprodukt

Mit der Verkettung meint man das Hintereinanderausführen von Abbildungen. Die Verkettung von linearen Abbildungen ist wieder linear:

Satz 6.3.1: Seien U, V, W drei VR und seien $f : U \longrightarrow V$ und $g : V \longrightarrow W$ zwei lineare Abbildungen. Dann ist die Verkettung

$$\begin{aligned} g \circ f : U &\longrightarrow W \\ u &\mapsto w = g(f(u)) \end{aligned}$$

ebenfalls wieder eine lineare Abbildung.

Matrix der Verkettung

Satz 6.3.2: Seien U, V, W drei VR und seien $f : U \longrightarrow V$ und $g : V \longrightarrow W$ zwei lineare Abbildungen. Die Abbildung f besitze bezüglich gewählter Basen B_U von U und B_V von V die Matrix $A \in \mathbb{R}^{l \times n}$. Die Abbildung g habe bezüglich der Basen B_V und B_W die Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times l}$. Dann besitzt die lineare Abbildung

$$g \circ f : U \longrightarrow W$$

bezüglich B_U und B_W die $m \times n$-Matrix

$$C = B \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{f \text{ linear}} & V & \xrightarrow{g \text{ linear}} & W \\ {\scriptstyle B_U = \{u_1, \dots, u_n\}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle B_V = \{v_1, \dots, v_l\}} & & \downarrow {\scriptstyle B_W = \{w_1, \dots, w_m\}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{l \times n}} & \mathbb{R}^l & \xrightarrow{B \in \mathbb{R}^{m \times l}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Beispiel:
Wir wählen als Beispiel die Verkettung der Ableitung von Polynomen vom Grad ≤ 3:

$$\begin{array}{ccccc} P_3 & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & P_2 & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & P_1 \\ {\scriptstyle B_{P_3}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle B_{P_2}} & & \downarrow {\scriptstyle B_{P_1}} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (1)'' &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ (x)'' &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ (x^2)'' &= 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ (x^3)'' &= 6x = 0 \cdot 1 + 6 \cdot x. \end{aligned}$$

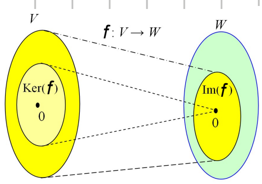
Die Matrix C ist also gegeben durch

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

6.4 Kern und Bild von linearen Abbildungen

Def. 6.4.1: Seien V und W zwei VR und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Der **Kern** von f ist die Menge der Vektoren $v \in V$, die von f auf den Nullvektor $0 \in W$ abgebildet werden:



$$\ker(f) := \left\{ v \in V \middle| f(v) = 0 \right\}.$$

Das **Bild** von f ist die Menge von Vektoren $w \in W$, für die es einen Vektor $v \in V$ gibt, der von f auf w abgebildet wird:

$$\boxed{\mathrm{im}(f) := f(V) = \left\{ w \in W \middle| w = f(v) \text{ für ein } v \in V \right\}.}$$

Die Notationen "ker" und "im" stammen von den englischen Ausdrücken "kernel" und "image".

Satz 6.4.2: $\ker(f)$ ist ein Unterraum von V und $\mathrm{im}(f)$ ist ein Unterraum von W.

Rezept: Kern

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f \text{ linear}} & W \\ {\scriptstyle B_V} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle B_W} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{m \times n}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

- Löse das homogene LGS $Ax = 0$ (Gauss-Algorithmus).
- Dann gilt

$$\ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \, Ax = 0 \right\}$$

$$\ker(f) = \left\{ v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \middle| \, x \in \ker(A) \right\}.$$

- Der Kern ist $(n - r)$-dimensional, wobei $r = \mathrm{rang}(A)$ die Anzahl Pivotelemente ist.

Rezept: Bild

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f \text{ linear}} & W \\ {\scriptstyle B_V} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle B_W} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{m \times n}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

- Die Spalten von A spannen das Bild von A auf. Das heisst, wir müssen nur noch die linear abhängigen Spalten wegstreichen und die Spalten die übrigbleiben, bilden eine Basis von $\mathrm{im}(A)$.
- Wir führen also den Gauss-Algorithmus durch. Diejenigen Spalten, die im Endschema des Gauss-Algorithmus ein Pivot enthalten, sind linear unabhängig. Diese bilden die gesuchte Basis des Bildes von f.
- Das Bild ist r-dimensional, wobei $r = \mathrm{rang}(A)$ die Anzahl Pivotelemente ist.

Rangsatz

Satz 6.4.3: Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(V)}$$

dim(im(f)) = r
dim(ker(f)) = n - r

4. **Knifflige Spur**

Wir betrachten die Spur-Abbildung tr auf den reellen 2×2-Matrizen, also die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} : \mathbb{R}^{2 \times 2} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \mathrm{tr}(M) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung ist. Überlegen Sie auch, wie viele Zeilen und Spalten die Matrix von tr haben muss.

b) Bestimmen Sie die Matrix A der Abbildung tr bezüglich der Standardbasen.

c) Was ist das Bild der Spur-Abbildung tr? Leiten Sie daraus mit dem Rangsatz die Dimension des Kernes von tr ab.

d) Was ist der Kern der Spur-Abbildung (ohne zu rechnen)? Schreiben Sie eine Basis des Kerns der Abbildung tr auf.

a) Es lässt sich leicht überlegen, dass die Spur folgende beiden Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(M + N) &= \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N) \quad \forall M, N \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \mathrm{tr}(\lambda \cdot M) &= \lambda \, \mathrm{tr}(M) \quad \forall M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass tr eine lineare Abbildung ist. Das kommutative Diagramm zu dieser Abbildung ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2 \times 2} & \xrightarrow{\mathrm{tr} \text{ linear}} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{1 \times 4}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Wir erwarten also eine 1×4-Matrix zu dieser Abbildung, also einen Zeilenvektor!!

b) Die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ besteht aus den Matrizen

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spuren dieser Matrizen sind

$$\begin{aligned} E_1 &\longmapsto \mathrm{tr}(E_1) = 1 \\ E_2 &\longmapsto \mathrm{tr}(E_2) = 0 \\ E_3 &\longmapsto \mathrm{tr}(E_3) = 0 \\ E_4 &\longmapsto \mathrm{tr}(E_4) = 1 \end{aligned}$$

und damit ist die Matrix A der Spurabbildung tr gegeben durch den Zeilenvektor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie kommt's? Ja überprüfen wir das Ganze anhand einer beliebigen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Bezüglich der Standardbasis hat M den Koordinatenvektor

$$x_M = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Multipliziert man diesen mit der Matrix A, erhalten wir:

$$A x_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} = m_{11} + m_{22} = \mathrm{tr}(M) \quad \checkmark$$

wie erwartet.

c) Die Spur einer Matrix aus $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ kann eine beliebige reelle Zahl sein. Das heisst $\mathrm{im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$. Nach dem Rangsatz muss dann gelten:

$$\dim(\ker(\mathrm{tr})) = \dim(\mathbb{R}^{2 \times 2}) - \dim(\mathrm{im}(\mathrm{tr})) = 4 - 1 = 3$$

Der Kern muss also drei-dimensional sein.

d) Der Kern muss aus den 2×2-Matrizen mit Spur 0 bestehen. Solche Matrizen sind von der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Eine Basis von $\ker(\mathrm{tr})$ ist dann z.B.

$$\left\{ E_2, \, E_3, \, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

6.5 Isomorphismen

6.5.1 Aus der Analysis: Umkehrabbildungen

Wir repetieren die Begriffe **injektiv** und **surjektiv**:
Def. 6.5.1: Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung (die nicht linear sein muss). Dann definiert man:

- f heisst **surjektiv** $\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$,
- f heisst **injektiv** $\Leftrightarrow$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
- f heisst **bijektiv** $\Leftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv.

Def/Satz 6.5.2: Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine bijektive Abbildung. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, sodass

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

das heisst:

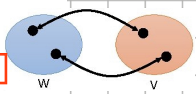
$$f^{-1}(f(x)) = \mathrm{id}_X(x) = x \qquad \text{und} \qquad f(f^{-1}(y)) = \mathrm{id}_Y(y) = y\,.$$

Die Abbildung f^{-1} heisst **Umkehrabbildung** oder **inverse Abbildung** von f.

6.5.2 Umkehrung von linearen Abbildungen

Satz 6.5.3: Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:
i) f injektiv $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $rang(f) = dim(V)$
ii) f surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{im}(f) = W$ $\Leftrightarrow$ $rang(f) = dim(W)$

Isomorphismus



Def. 6.5.4: Eine bijektive *lineare* Abbildung heisst **Isomorphismus**.
Satz 6.5.5: Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann gibt es eine *eindeutige lineare* Abbildung $g : W \to V$, sodass

$$g \circ f = \mathrm{id}_V \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_W$$

Wir bezeichnen die lineare Abbildung g mit f^{-1} und nennen sie die zu f **inverse lineare Abbildung**.

6.5.3 Matrix der inversen Abbildung

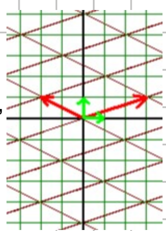
Ein Isomorphismus f besitzt eine Umkehrabbildung f^{-1}. Wie berechnet man die Matrix dieser Umkehrabbildung, wenn man die Matrix A der Abbildung f bereits kennt?

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f \text{ linear}} & W \\ \downarrow B_V & & \downarrow B_W \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{K}^{m\times n}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

$n < \infty \Rightarrow m = n$

Wenn A die Matrix eines Isomorphismus $f : V \longrightarrow W$ ist, dann ist die Matrix der Umkehrabbildung f^{-1} (bezüglich der gleichen Basen von V und W) die inverse Matrix A^{-1}.

6.6 Basiswechsel



Matrix des Basiswechsels

Def 6.6.1: Sei V ein VR, B_V die "alte" Basis von V und $\widetilde{B}_V$ die "neue" Basis von V. Die **Matrix** T **des Basiswechsels** ist die Matrix der Identitätsabbildung

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V \\ \downarrow B_V & & \downarrow \widetilde{B}_V \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T \in \mathbb{R}^{n\times n}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Man erhält die Matrix T, indem man die **alten** Basisvektoren bzgl. der **neuen** Basis darstellt und in die Spalten schreibt.

Satz 6.6.2: Sei x der Koordinatenvektor von $v \in V$ bezüglich der alten Basis B_V und $\widetilde{x}$ der Koordinatenvektor von v bezüglich der neuen Basis $\widetilde{B}_V$. Dann gilt

$$\boxed{\widetilde{x} = Tx}$$

Rezept: Basiswechsel

Gegeben ist ein Vektorraum V mit "alter" Basis B_V und "neuer" Basis $\widetilde{B}_V$:

- T: Schreibe die Basisvektoren der "alten" Basis bzgl. der Basisvektoren der "neuen" Basis $\Longrightarrow$ Spalten
- T^{-1}: Schreibe die Basisvektoren der "neuen" Basis bzgl. der Basisvektoren der "alten" Basis $\Longrightarrow$ Spalten

Da die "alte" Basis meist die Standardbasis ist, ist das Aufstellen der inversten Matrix T^{-1} oft einfacher!

3. 3×3 **invers**

Eine lineare Abbildung sei gegeben durch

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Ist diese Abbildung bijektiv? Wenn ja, berechnen Sie die Umkehrabbildung f^{-1} bzw. ihre Matrix A^{-1}.

Wir stellen zuerst die Matrix A der Abbildung bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ auf:

$$e_1 \longmapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad e_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad e_3 \longmapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist also

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es ist nun zu überprüfen, ob diese Matrix regulär ist. Berechnen wir also ihren Rang:

$$\begin{array}{ccc|} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die Matrix A hat nicht vollen Rang, ist also singulär. Die inverse Matrix existiert nicht und somit auch nicht die Umkehrabbildung A^{-1}.

4. **Hin und zurück, geht das?**

Sei P_2 der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Betrachten wir die lineare Abbildung definiert durch

$$f : P_2 \longrightarrow P_2$$
$$p(x) \longmapsto (xp(x))'.$$

a) Stellen Sie die Matrix A von f bezüglich der Basis $\{1, x, x^2\}$ auf.
b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A. Ist die Abbildung f bijektiv?
c) Berechnen Sie die Matrix A^{-1} der Umkehrabbildung f^{-1}.

a) Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren und drücken diese in der Basis $\{1, x, x^2\}$ aus:

$$1 \mapsto (x \cdot 1)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$
$$x \mapsto (x \cdot x)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$$
$$x^2 \mapsto (x \cdot x^2)' = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2$$

Die Matrix A der Abbildung f ist also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix A ist schon diagonal:

$$\begin{array}{ccc|} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}$$

Der Rang von A ist drei, diese Matrix ist also regulär. Somit ist die Abbildung f bijektiv.

c) Wir verwenden den Gauss-Jordan Algorithmus, um die Inverse zu berechnen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

Wir erhalten

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung:
Aus den Spalten von A^{-1} können wir nun wiederum ablesen, was die Umkehrabbildung f^{-1} tut. Sie bildet die Basisvektoren wiefolgt ab:

$$1 \longmapsto 1 \qquad x \longmapsto \frac{x}{2} \qquad x^2 \longmapsto \frac{x^2}{3}.$$

1. **Manchmal macht's ein Basiswechsel diagonal**

Sei V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Basis $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ besitze bezüglich der Basis B_V die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -59 & 74 & -87 \\ -4 & 7 & -6 \\ 38 & -46 & 56 \end{pmatrix}.$$

Der Vektorraum V habe eine weitere Basis $\widetilde{B}_V = \{\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_3\}$ mit

$$\widetilde{v}_1 = v_1 + 2v_2 + v_3 \qquad \widetilde{v}_2 = -3v_1 + 2v_3 \qquad \widetilde{v}_3 = 4v_1 + v_2 - 2v_3.$$

a) Bestimmen Sie die Matrix T des Basiswechsels $B_V \to \widetilde{B}_V$.

a) Die Inverse der Matrix des Basiswechsels enthält als Spalten die Koordinaten der neuen Basis bezüglich der alten Basis:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Invertiert man diese Matrix, bekommt man

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -7 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Basiswechsel: Spezialfall

Satz 6.6.3: Sei $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung und A die Matrix von f bzgl. der "alten" Basis B_V. Dann ist die Matrix von f bzgl. "neuer" Basis $\widetilde{B}_V$ gegeben durch

$$\boxed{\widetilde{A} = TAT^{-1}}$$

wobei T die Matrix des Basiswechsels von B_V nach $\widetilde{B}_V$ ist.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A \in \mathbb{K}^{n \times n}"] \arrow[dd, bend right=60, "T"'] & \mathbb{K}^n \arrow[dd, bend left=60, "T"] \\
V \arrow[u, "B_V"] \arrow[d, "\widetilde{B}_V"'] \arrow[r, "f \text{ linear}"] & V \arrow[u, "B_V"'] \arrow[d, "\widetilde{B}_V"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\widetilde{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

b) Berechnen Sie die Matrix D von f bezüglich der neuen Basis $\widetilde{B}_V$. Was stellen Sie fest?

b) A ist die Matrix von f bezüglich B_V . Dann ist die Matrix D bezüglich der neuen Basis $\widetilde{B}_V$ anhand des folgenden kommutativen Diagramms ablesbar:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "A \in \mathbb{R}^{3\times 3}"] \arrow[d, "T"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "T"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "D \in \mathbb{R}^{3\times 3}"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

Daran lässt sich ablesen, dass

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -7 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -59 & 74 & -87 \\ -4 & 7 & -6 \\ 38 & -46 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -7 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix D ist erstaunlicherweise diagonal. Es kann vorkommen, dass durch einen Basiswechsel die Matrix auf eine viel einfachere Form gebracht werden kann. Gewisse Matrizen können mit einem Basiswechsel **diagonalisiert** werden, also in eine Form verwandelt werden, in der nur die Einträge auf der Hauptdiagonalen der Matrix ungleich null sind. In dieser neuen Basis, also dem geänderten Koordinatensystem des Vektorraums, wird die lineare Abbildung dann durch eine reine Streckung entlang der Koordinatenachsen beschrieben.

Basiswechsel

Satz 6.6.3: Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und A die Matrix von f bzgl. der "alten" Basen B_V und B_W. Dann ist die Matrix von f bzgl. "neuer" Basen $\widetilde{B}_V$ und $\widetilde{B}_W$ gegeben durch

$$\boxed{\widetilde{A} = SAT^{-1}}$$

wobei T die Matrix des Basiswechsels von B_V nach $\widetilde{B}_V$ und S die Matrix des Basiswechsels von B_W nach $\widetilde{B}_W$ sind.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A \in \mathbb{K}^{m \times n}"] \arrow[dd, bend right=60, "T"'] & \mathbb{K}^m \arrow[dd, bend left=60, "S"] \\
V \arrow[u, "B_V"] \arrow[d, "\widetilde{B}_V"'] \arrow[r, "f \text{ linear}"] & W \arrow[u, "B_W"'] \arrow[d, "\widetilde{B}_W"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\widetilde{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Beispiel:
Wir betrachten auf dem Vektorraum P_3 der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 die 2. Ableitung

$$\frac{d^2}{dx^2} : P_3 \longrightarrow P_1, \qquad p(x) \longmapsto p''(x).$$

Die 2. Ableitung ist eine lineare Abbildung. Bezüglich der beiden Standardbasen

$$B_{P_3} = \left\{1, x, x^2, x^3\right\},$$
$$B_{P_1} = \left\{1, x\right\}.$$

haben wir die Matrix der 2. Ableitung $\frac{d^2}{dx^2}$ bereits in Abschnitt 6.3 im Beispiel zur Verkettung von linearen Abbildungen ausgerechnet. Diese Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wir möchten nun die Matrix $\widetilde{A}$ von $\frac{d^2}{dx^2}$ bezüglich zweier neuer Basen

$$\widetilde{B}_{P_3} = \left\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\right\},$$
$$\widetilde{B}_{P_1} = \left\{1, 1-2x\right\}$$

von P_3 und P_1 mit Hilfe der Formel

$$\widetilde{A} = SAT^{-1}$$

berechnen. Die Situation ist im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^4 \arrow[r, "A \in \mathbb{R}^{2\times 4}"] \arrow[dd, bend right=60, "T"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[dd, bend left=60, "S"] \\
P_3 \arrow[u, "B_{P_3}"] \arrow[d, "\widetilde{B}_{P_3}"'] \arrow[r, "\frac{d^2}{dx^2}"] & P_1 \arrow[u, "B_{P_1}"'] \arrow[d, "\widetilde{B}_{P_1}"] \\
\mathbb{R}^4 \arrow[r, "\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{2\times 4}"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

dargestellt. Die Matrix T^{-1} haben wir schon im Beispiel zuvor ausgerechnet, sie ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir brauchen also noch die Matrix S des Basiswechsel $B_{P_1} \to \widetilde{B}_{P_1}$. Diese Matrix bekommen wir aus:

$$1 \longmapsto 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1-2x),$$
$$x \longmapsto x = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1-2x),$$

also

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nun haben wir alles zusammen, um die Formel (6.1) anzuwenden. Es ist

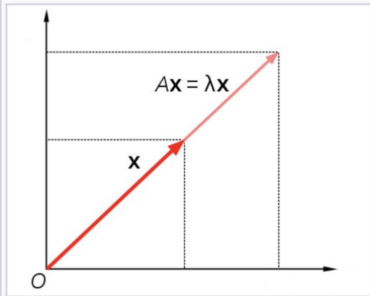
$$\widetilde{A} = SAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

7.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Def 7.1.1: Sei V ein VR und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

- Ein Vektor $v \in V$, wobei $v \neq 0$, heisst **Eigenvektor (EV)** von f mit **Eigenwert (EW)** $\lambda \in \mathbb{K}$, falls
$$f(v) = \lambda v.$$
- Sei weiter $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine $n \times n$-Matrix. Dann ist der Vektor $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$ ein **Eigenvektor** der Matrix A mit **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{K}$, falls
$$Ax = \lambda x.$$



Matrix A acts by stretching the vector **x**, not changing its direction, so **x** is an eigenvector of A.

Berechnung von Eigenvektoren

Def 7.1.2: Sei V ein VR und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ bzgl. einer beliebigen Basis. Dann heisst
$$\boxed{E_\lambda := \ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\}$$
Eigenraum zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$.

Berechnung von Eigenwerten

Satz 7.1.3: Sei V ein VR und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ bzgl. einer beliebigen Basis. Dann ist $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert der Matrix A, wenn
$$\boxed{\det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = 0.}$$

Charakteristisches Polynom

Def 7.1.6: Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Das Polynom
$$\boxed{p_A(\lambda) := \det(\lambda \mathbb{1}_n - A)}$$
heisst das **charakteristische Polynom** zur Matrix A.

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{1} - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \qquad 1 \leq k \leq n$$

n: Anzahl Nullstellen des char. Polynom einer *nxn*-Matrix (wenn man die Nullstellen mit ihrer (alg.) Vielfachheit zählt)

k: Anzahl verschiedener Nullstellen/Eigenwerte

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Algebraische und geometrische Vielfachheit

Eigenwerte können mehrfach vorkommen. Man bezeichnet dies als die **algebraische Vielfachheit** eines Eigenwerts. Mit der **geometrischen Vielfachheit** des Eigenwerts λ bezeichnet man die Dimension des entsprechenden Eigenraums. Die geometrische Vielfachheit entspricht also der Anzahl linear unabhängigen Eigenvektoren zum EW λ.

$$1 \leq \text{geo. Vielf. von } \lambda \leq \text{alg. Vielf. von } \lambda\,.$$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & -5i \\ 5i & 3 \end{pmatrix}$$

1) Eigenwerte berechnen:

$$p_H(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{1} - H) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 5i \\ -5i & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 - (-5i)5i = \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 25i^2 =$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda-8)(\lambda+2)$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit die Eigenwerte der Matrix H sind $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = -2$.

2) Eigenvektoren berechnen:

i) Eigenvektor zu λ_1:

$$8 \cdot \mathbb{1} - H = \begin{pmatrix} 5 & 5i \\ -5i & 5 \end{pmatrix}.$$

Das homogene lineare Gleichungssystem liefert als Lösung

$$\begin{array}{cc|} x_1 & x_2 \\ \hline 5 & 5i \\ -5i & 5 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{cc|} x_1 & x_2 \\ \hline \boxed{1} & i \\ 0 & 0 \end{array} \;\Rightarrow\; x_2 = t,\; x_1 = -it.$$

Damit ist $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 8$. Normiert man diesen Eigenvektor noch auf die Länge 1, erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Eigenvektor zu λ_2:

$$(-2) \cdot \mathbb{1} - H = \begin{pmatrix} -5 & 5i \\ -5i & -5 \end{pmatrix}.$$

Das homogene lineare Gleichungssystem liefert als Lösung

$$\begin{array}{cc|} x_1 & x_2 \\ \hline -5 & 5i \\ -5i & -5 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{cc|} x_1 & x_2 \\ \hline \boxed{1} & -i \\ 0 & 0 \end{array} \;\Rightarrow\; x_2 = t,\; x_1 = it.$$

Damit ist $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -2$. Auf einen Einheitsvektor normiert erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.2 Diagonalisieren von Matrizen

Sei V ein VR mit einer beliebigen Basis B_V und sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix einer linearen Abbildung $f: V \to V$ bezüglich B_V. Wenn wir die Matrix A diagonalisieren wollen, dann müssen wir – falls möglich – aus den berechneten Eigenvektoren von f (oder A) eine Basis B_{EV} erstellen und führen den Basiswechsel $B_V \to B_{EV}$ durch.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A \in \mathbb{K}^{n\times n}"] \arrow[dd, bend right=60, "T"'] & \mathbb{K}^n \arrow[dd, bend left=60, "T"] \\
V \arrow[u, "B_V"] \arrow[r, "f \text{ linear}"] \arrow[d, "B_{EV}"'] & V \arrow[u, "B_V"'] \arrow[d, "B_{EV}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "D \in \mathbb{K}^{n\times n}"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Rezept: Diagonalisieren von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

1. Eigenwerte berechnen. Die EW der Matrix A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms
$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$$
Dabei hat jeder EW λ_i die algebraische Vielfachheit n_i.
2. Eigenvektoren berechnen: Für alle EW λ_i berechne eine Basis von
$$\ker(\lambda_i \mathbb{1} - A)\,.$$
3. Basis von EV aufstellen: Hat man n linear unabhängige EV erhalten bilden diese EV eine Basis. Nur dann ist die Matrix diagonalisierbar. Falls man zu wenige EV bekommt, ist die Matrix nicht diagonalisierbar und man muss an dieser Stelle abbrechen.
4. Basiswechsel auf die Basis von EV: Schreibe die n EV in die Spalten von T^{-1}. Die Matrix T erhält man durch invertieren. Die Diagonalmatrix enthält die EW auf der Diagonalen (mit Vielfachheit) bzw. ergibt sich aus $D = TAT^{-1}$. **MATLAB: [Ti, D] = eig(A)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

1) Eigenwerte berechnen:
$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - \frac{9}{4} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - \frac{9}{4} = \lambda^2 - 4\lambda + \frac{7}{4}.$$
Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit die Eigenwerte der Matrix A sind
$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot\frac{7}{4}}}{2} = \frac{4\pm 3}{2}$$
und somit
$$\lambda_1 = \frac{7}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$
2) Eigenvektoren berechnen:
a) Eigenvektor zu λ_1:
$$\frac{7}{2}\mathbb{1} - A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$
Das homogene lineare Gleichungssystem liefert als Lösung
$$\begin{array}{cc|} x_1 & x_2 \\ \hline \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \to \begin{array}{cc|} x_1 & x_2 \\ \hline \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \Rightarrow x_2 = t,\ x_1 = t.$$
Damit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = \frac{7}{2}$.
b) Eigenvektor zu λ_2:
$$\frac{1}{2}\mathbb{1} - A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$
Das homogene lineare Gleichungssystem liefert als Lösung
$$\begin{array}{cc|} x_1 & x_2 \\ \hline -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \to \begin{array}{cc|} x_1 & x_2 \\ \hline \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \Rightarrow x_2 = t,\ x_1 = -t.$$
Damit ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.
3) Die beiden Eigenvektoren gehören zu verschiedenen Eigenwerten und sind deshalb linear unabhängig. Folglich ist
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A. Bezüglich dieser Basis ist
$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
diagonal. Die Inverse der Matrix des Basiswechsels ist
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Def 7.2.1: Sei V ein VR, $f: V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine $n \times n$-Matrix.

- Die Abbildung f heisst **diagonalisierbar**, falls es eine Basis von V gibt, bezüglich welcher die Matrix von f diagonal ist.
- Die Matrix A heisst **diagonalisierbar**, falls es eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt (Basiswechsel), sodass $D := TAT^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

Satz 7.2.2: Eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus lauter Eigenvektoren von f besitzt.

Satz 7.2.3: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer linear unabhängig.

Korollar 7.2.4: Falls eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ besitzt, dann ist A diagonalisierbar.

Satz 7.2.5: Sei A eine $n \times n$-Matrix mit dem charakteristischen Polynom
$$p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}\,,$$
d.h. A hat die EW $\lambda_i$mit algebraischen Vielfachheiten n_i, $i = 1, \ldots k$. Die Matrix A ist dann und nur dann diagonalisierbar, wenn
$$\dim(E_{\lambda_i}) = n_i$$

Eine $n \times n$-Matrix A ist also genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert λ_i die Dimension des zugehörigen Eigenraums (d.h. die geometrische Vielfachheit) mit der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts übereinstimmt. Es muss also zu jedem EW λ_i mit algebraischer Vielfachheit n_i genau n_i linear unabhängige EV geben.

Wann kann man diagonalisieren?

Eine $n\times n$-Matrix A ist diagonalisierbar, wenn mindestens eine der folgenden Aussagen zutrifft:

- ⊠ A n verschiedene Eigenwerte hat.
- ⊠ A einen Eigenwert λ hat, dessen Eigenraum die Dimension n hat.
- ⊠ n gleich der Summe der Dimensionen aller Eigenräume von A ist.
- ⊠ Wenn A n linear unabhängige Eigenvektoren hat.
- ⊠ Wenn es zu jedem Eigenwert von A mit Vielfachheit k auch k linear unabhängige Eigenvektoren gibt.

immer diagonalisierbar:

- Matrizen mit n verschiedenen Eigenwerten (also alle Vielfachheit 1) sind immer diagonalisierbar, denn Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind stets linear unabhängig.
- Sogenannte **normale** Matrizen, dazu gehören
  - **symmetrische** Matrizen $A = A^T$
  - **hermitesche** Matrizen $A = A^*$
  - **orthogonale** Matrizen $AA^T = \mathbb{1}_n$
  - **unitäre** Matrizen $AA^* = \mathbb{1}_n$

  Bei normalen Matrizen kann die Basis von EV sogar als ONB gewählt werden.

Potenzen A^n einer Matrix

- Wir stellen zuerst fest, dass für die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

- Es gilt aber auch:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{\text{n mal}} = \underbrace{(T^{-1}DT) \cdot (T^{-1}DT) \cdots (T^{-1}DT)}_{\text{n mal}}$$
$$= T^{-1} D \mathbb{1}_n D \mathbb{1}_n \cdots \mathbb{1}_n DT = T^{-1} D^n T.$$

und somit haben wir eine Formel für A^n!!

$$\boxed{A^n = T^{-1} D^n T}$$

Matrixexponential

$$e^A := \mathbb{1}_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Wir brauchen also die Potenzen A^n für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen, wobei wir nur den Fall betrachten, in welchem A diagonalisierbar ist:

$$D = TAT^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad A = T^{-1}DT$$

- Die Formel für A^n können wir zu Berechnung von e^A verwenden:

$$e^A = T^{-1}\mathbb{1}_n T + T^{-1}DT + \frac{1}{2}T^{-1}D^2T + \frac{1}{6}T^{-1}D^3T + \ldots$$
$$= T^{-1}\left(\mathbb{1}_n + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \ldots\right) T = T^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}\right) T = T^{-1} e^D T,$$

wobei

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

- Also haben wir auch eine Formel für e^A!!!!

$$\boxed{e^A = T^{-1} e^D T}$$

Nicht-diagonalisierbar?

Wie kann man diese Anwendungen A^n, e^A usw. berechnen, wenn A nicht diagonalisierbar ist?

- Man berechnet die sogenannte **Jordan-Normalform** der Matrix A.
- Mit der Jordan-Normalform funktioniert die Berechnung von A^n und e^A trotzdem.

Matrixpotenz

Von der unbekannten Matrix B kennt man die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.8$ mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Matrix B.
b) Berechnen Sie B^{10}
c) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} B^n$

Aus der Aufgabenstellung kann man die Diagonalmatrix sowie die Matrix des Basiswechsels ableiten:

$$D = TBT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Wir erhalten

$$B = T^{-1}DT = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2.4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8 & -1.2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$B^{10} = T^{-1}D^{10}T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 0.8^{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0.32 \\ 3 & 0.54 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\approx \begin{pmatrix} 9.03 & -5.36 \\ 13.39 & -7.93 \end{pmatrix}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} B^n = T^{-1} \lim_{n\to\infty} D^n T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0.8^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$$