Logik und Mengen

Aussage (nach Aristoteles, 384–322 v. Chr.)

Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu sagen, es sei wahr oder falsch.

- Wahrheitswert einer Aussage muss nicht bekannt sein

logische Äquivalenz

2 Aussagen P und Q heissen logisch äquivalent, wenn sie die gleichen Wahrheitswerte besitzen. Man schreibt dann $P \equiv Q$.

- geht nur um Wahrheitswerte – kein inhaltlicher Zusammenhang gefordert

Negation, Konjunktion, Disjunktion

Aussage	Negation NICHT
P	$\neg P$
w	f
f	w

Aussagen		Konjunktion UND	Disjunktion ODER
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Reduzierbarkeit und funktionale Vollständigkeit [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Es ist möglich, einzelne Verknüpfungen durch andere auszudrücken; zum Beispiel lässt sich die Konjunktion $A \wedge B$ durch Disjunktion und Negation als $\neg(\neg A \vee \neg B)$ oder Konditional $P \rightarrow Q$ durch die Disjunktion $\neg P \vee Q$ ausdrücken. Allgemein heißt eine Menge von Junktoren bezogen auf ein logisches System *funktional vollständig* oder *semantisch vollständig*, wenn mit Hilfe der betroffenen Konnektive alle anderen Konnektive des logischen Systems ausgedrückt werden können. Für die klassische Aussagenlogik sind zum Beispiel die Junktorenmengen $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ und $\{\neg, \rightarrow\}$ funktional vollständig. Das bedeutet, dass sich alle Junktoren der klassischen Aussagenlogik wahlweise auf Negation und Konjunktion, auf Negation und Disjunktion oder auf Negation und Konditional zurückführen lassen. Häufig verwendete Junktorenmengen sind $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$.

Tatsächlich ist es möglich, alle Verknüpfungen allein mit Hilfe *einer einzigen* Verknüpfung darzustellen, und zwar mit der Shefferfunktion (NAND), aber auch mit der Peirce-Funktion (NOR).

Sheffer-Operatoren [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Wenn sich mit einem Junktor allein, d. h. ganz ohne Hinzunahme weiterer Junktoren alle anderen Junktoren ausdrücken lassen, dann wird dieser Junktor *Sheffer-Operator* oder *Shefferfunktion* (nach Henry Maurice Sheffer) genannt. Für die klassische Aussagenlogik gibt es genau zwei Sheffer-Operatoren: den Shefferstrich, auch NAND genannt ($\uparrow$ oder $|$) und den Peirce-Operator, auch NOR genannt $\downarrow$.

De Morgansche Gesetze

- $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ links in DT NAND
- $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ links in DT NOR

Bemerkung: Da $P \wedge Q \equiv \neg(\neg(P \wedge Q)) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$ bräuchte man theoretisch kein eigenes Symbol für Konjunktion

Implikation / Konditional

$P \Rightarrow Q := \neg P \vee Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

Bemerkung: $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$ «Kontraposition der Implikation»

hinreichend: $P \Rightarrow Q$ P ist hinreichende Bedingung für Q

notwendig: $P \Leftarrow Q$ P ist notwendige Bedingung für Q

«aus Falschem folgt Beliebiges»: ist P falsch, so ist $P \Rightarrow Q$ wahr

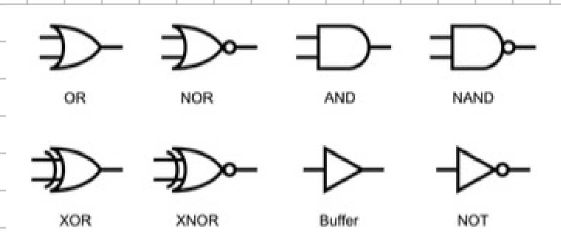
«Wahres folgt aus Beliebigem»: ist Q wahr, so ist $P \Rightarrow Q$ wahr

«aus Wahrem folgt nur Wahres»: ist P wahr, so ist $P \Rightarrow Q$ nur wahr falls Q wahr

Bikonditional

$P \Leftrightarrow Q := (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ in DT XNOR

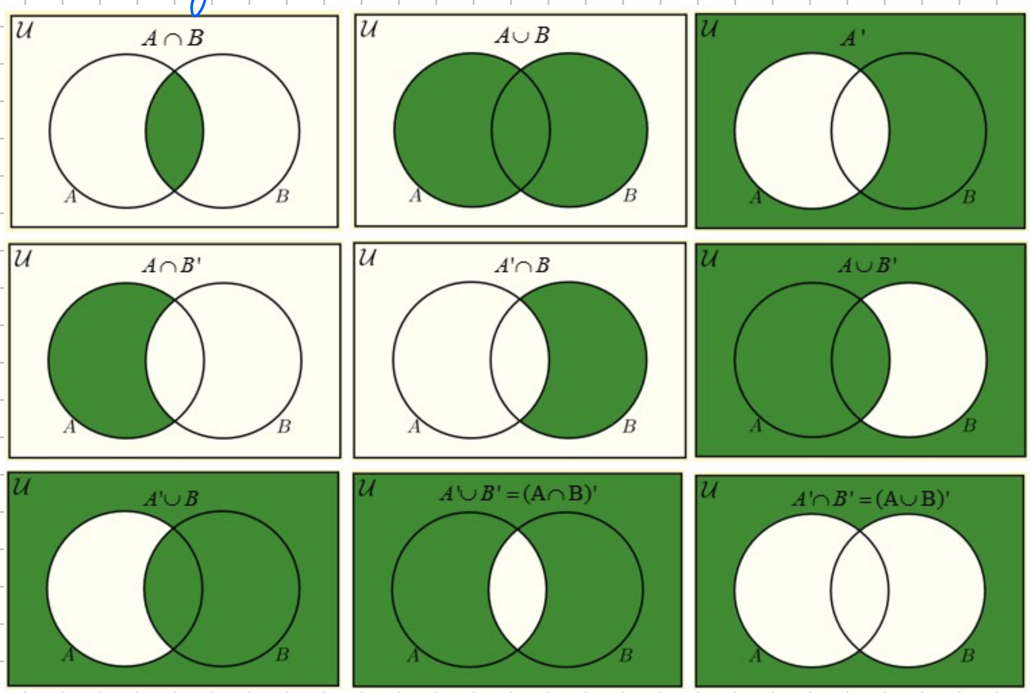
Symbole Digitaltechnik (USA)



Menge (nach G. Cantor, 1895) „naiv"!

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte einer Menge heissen Elemente

Venn-Diagramme



Paaraxiom (G. Peano, 1897)

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Mengenprodukt

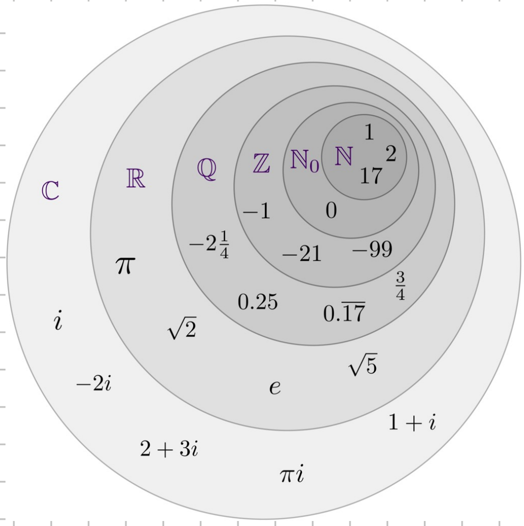
$M_1 \times \dots \times M_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n\}$

falls $M_1 = \dots = M_n$ schreibt man auch $M^n := \underbrace{M \times \dots \times M}_{n\text{-mal}}$

Zahlen

Zahlenmengen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ kein Körper (K3, K4, K8 nicht erfüllt)

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ kein Körper (K8 nicht erfüllt)

$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{GGT}(m,n) = 1\}$ Körper

$\mathbb{R}$: "Vervollständigung" von $\mathbb{Q}$ (keine "Lücken") Körper

$\mathbb{C} := \{z = x + y \cdot i \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ Körper

x: Realteil, y: Imaginärteil (ohne i), i: imaginäre Einheit

Körperaxiome

Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften.

(K1) $x + (y + z) = (x + y) + z$, (*Assoziativität*)

(K2) $x + y = y + x$, (*Kommutativität*)

(K3) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, so dass $x + 0 = x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$), (*Existenz der Null*)

(K4) Es gibt ein $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$, (*Existenz additiver Inverser*)

(K5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, (*Assoziativität*)

(K6) $x \cdot y = y \cdot x$, (*Kommutativität*)

(K7) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, so dass $x \cdot 1 = x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$), (*Existenz der Eins*)

(K8) Falls $x \neq 0$, dann existiert ein $x^{-1} \in \mathbb{R}$, so dass $x \cdot x^{-1} = 1$, (*Existenz multiplikativer Inverser*)

(K9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, (*Distributivität*)

komplexe Zahlen

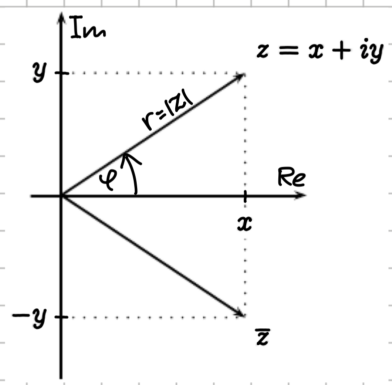
konjugiert komplexe Zahl: $\bar{z} := x - y \cdot i$ (→ Vorzeichen des Imaginärteils wechseln, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$)

Betrag: $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ (Länge des "Vektors" in komplexer Zahlenebene)

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (direkter Weg immer kürzer / gleich lang)

$|z| = |\bar{z}|$



kartesische Koord.: (x, y)

$\mathrm{Re}(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$\mathrm{Im}(z) = y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \in \mathbb{R}$

Addition/Subtraktion:

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$

Multiplikation:

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 y_2 - y_1 x_2)i$

Division:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}$

Kehrwert:

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$, $\bar{\bar{z}} = z$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Polarkoordinaten: (r, φ)

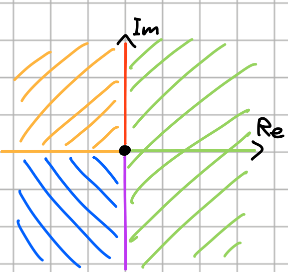
$$z = \underbrace{x + iy}_{\text{kartesisch}} = \underbrace{r\,(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))}_{\text{Polarform}}$$

Polar → kartesisch:

$x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$

kartesisch → Polar:

$$r = |z|, \quad \varphi\,(\text{Argument}) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0 \end{cases}$$



Multiplikation:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \mathrm{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$ Radien multiplizieren, Winkel addieren

Division:

$z_1 / z_2 = r_1 / r_2 \cdot \mathrm{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)$

geordneter Körper der reellen Zahlen

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ mit Addition $+$, Multiplikation $\cdot$ und (schwachen) Totalordnung $\leq$

$\Rightarrow$ auf $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnungsrelation, die mit Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen verträglich ist, $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper

Schranken von Teilmengen von reellen Zahlen

sei $M \subseteq \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$ ist untere Schranke von M, falls $a \leq x \ \forall x \in M$

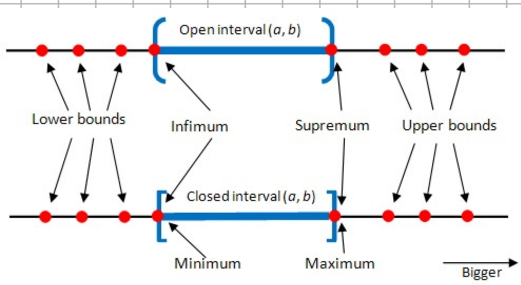
$a \in \mathbb{R}$ ist obere Schranke von M, falls $x \leq a \ \forall x \in M$

$\inf(M) :=$ grösste untere Schranke

$\sup(M) :=$ kleinste obere Schranke

$\min(M) := \inf(M) \in M$

$\max(M) := \sup(M) \in M$



Supremumseigenschaft

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum

$\Leftrightarrow$

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Infimum

$\Leftrightarrow$

Jede nichtleere, beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Infimum und ein Supremum

ein geordneter Körper mit dieser Eigenschaft heisst ordnungsvollständig

Axiome reelle Zahlen

1. Körper
2. total geordnet
3. ordnungsvollständig ($\mathbb{Q}$ nicht ordnungsvollständig)

erweiterte reelle Zahlen

$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$

$\pm\infty \notin \mathbb{R}$, $\pm\infty$ liegen jenseits der Zahlengerade: $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\bar{\mathbb{R}}$ ist total geordnet, ordnungsvollständig, kein Körper

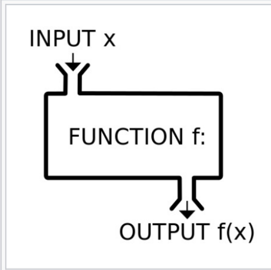
undefinierte Ausdrücke: $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{0}$

Funktionen

Funktion/Abbildung

ordnet jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y \in Z$ zu:

$$f: D \to Z$$
$$x \mapsto y = f(x)$$



Schematic depiction of a function described metaphorically as a "machine" or "black box" that for each input yields a corresponding output

Graph, Bild, Urbild

Sei $f: D \to Z$ eine Funktion

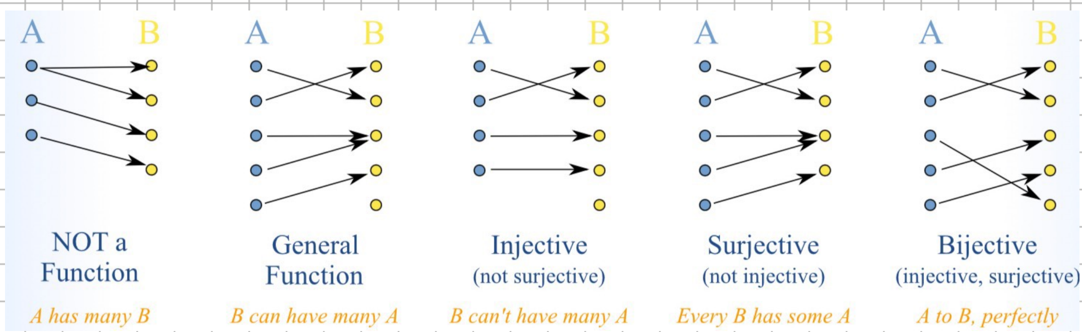
1. Graph von f $\quad G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq D \times Z$
2. Bild einer Teilmenge $A \subseteq D$ unter f $\quad f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Z$
3. Bild der Funktion f $\quad \mathrm{im}(f) := f(D) = \{f(x), x \in D\} \subseteq Z$
4. Urbild einer Teilmenge $B \subseteq Z$ unter f $\quad f^{-1}(B) := \{x \in D \mid f(x) \in B\} \subseteq D$

Komposition

für 2 Funktionen $f: D_f \to Z_f$ und $g: D_g \to Z_g$ gelte $\mathrm{im}(g) \subseteq D_f$
dann ist Komposition $f \circ g: D_g \to Z_f$ definiert durch

$$x \mapsto (f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad x \in D_g$$

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität



Monotonie

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, heisst

mon. w. $\iff \forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$
str. m. w. $\iff \forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$
mon. f. $\iff \forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$
str. m. f. $\iff \forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$

str. mon. $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ injektiv

Symmetrie

f ist gerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$
ungerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$

Periodizität

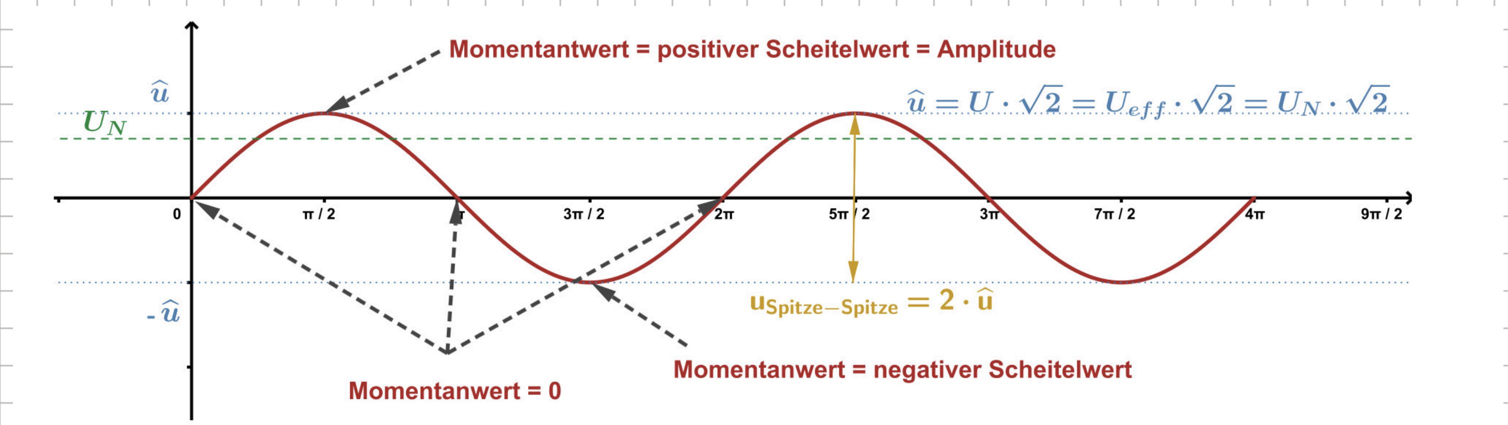
f heisst periodisch, falls $\exists P \neq 0: x+P \in D \wedge f(x+P) = f(x) \quad \forall x \in D$

-> P-periodishe f ist auch kP-periodisch $\forall k \in \mathbb{N}$
-> normalerweise an kleinster positiven Periode interessiert

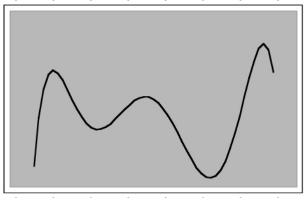
Mittelwerte

arithmetishe Mittel von f über Intervall $[a,b]$ $\bar{f} := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$
↳ ET: Gleichwert / DC-Wert

quadratishes Mittel von f über Intervall $[a,b]$ $f_{RMS} := \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^2\,dx} \geq 0$
↳ ET: Effektivwert / Nennwert



Polynomfunktionen



$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \; n \in \mathbb{N}_0$

Scheitelpunktform quadratische Funktion:

$ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+c) = a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}) = a(x-(-\frac{b}{2a}))^2-\frac{b^2}{4a}+c = a(x-x_s)^2+y_s$

Scheitelpunkt: (x_s, y_s) mit $x_s = -\frac{b}{2a}$, $y_s = c-\frac{b^2}{4a}$

Nullstellen quadratische Funktion:

$p(x) = a(x-x_s)^2+y_s$ besitzt

0	reelle Nullstelle, falls	$a y_s > 0$	$\Leftrightarrow$	$b^2-4ac<0$
1	reelle Nullstelle, falls	$a y_s = 0$	$\Leftrightarrow$	$b^2-4ac=0$
2	reelle Nullstellen, falls	$a y_s < 0$	$\Leftrightarrow$	$b^2-4ac>0$

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes nicht konstante Polynom besitzt im Bereich der komplexen Zahlen mindestens eine Nullstelle (komplexe Zahlen algebraisch abgeschlossen).

Fall reeller Koeffizienten → RT

Nullstellen können trotzdem komplex sein, es gilt aber: ist ω eine nicht-reelle Nullstelle von P, so ist es auch $\bar{\omega}$.

In faktorisierter Schreibweise von P lassen sich daher die zugehörigen Linearfaktoren immer zu einem quadratischen Faktor $(z-\omega)(z-\bar{\omega})$ zusammenfassen, welcher ausmultipliziert wieder rein reell ist:

→ in UTF ausmultiplizieren

Zerlegung in reelle Faktoren:

UTF Jedes reelle Polynom lässt sich in Linearfaktoren und über $\mathbb{R}$ irreduzible quadratische Faktoren zerlegen:

$p(x) = a_n(x-x_1)^{j_1} \cdots (x-x_l)^{j_l}(x^2+b_1x+c_1)^{k_1} \cdots (x^2+b_mx+c_m)^{k_m}$

mit $x_1, \dots, x_l, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, $b_i^2 - 4c_i < 0$, $i = 1, \dots, m$, $j_1, \dots, j_l, k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$

- $x_1, \dots, x_l$ sind l verschiedene reelle Nullstellen, $j_1, \dots, j_l$ ihre Vielfachheiten
- $x^2+b_ix+c_i$ sind m verschiedene quadr. Faktoren, $k_1, \dots, k_m$ ihre Vielfachheiten
- wegen $b_i^2-4c_i<0$ sind quadr. Faktoren irreduzibel über $\mathbb{R}$
- $j_1+\dots+j_l+2(k_1+\dots+k_m) = n$
  - ⇒ P vom Grad n max. n Nullstellen
  - ⇒ P mit ungeradem Grad min. 1 Nullstelle
- Auffinden d. Zerlegung i. A. schwierig, oft nur mit CAS lösbar

Polynominterpolation:

gegeben: $n+1$ Stützpunkte $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $j \in \{0,\dots,n\}$

gesucht: Polynomfunktion p mit $\deg(p) \leq n$, deren Graph durch St.punkte geht

Interpolationsgleichungen: $p(x_j) = y_j$, $j \in \{0,\dots,n\}$

↳ $n+1$ Gleichungen mit $n+1$ Unbekannte $a_0,\dots,a_n$

p eindeutig bestimmt durch $(a_0,\dots,a_n)^T$

Regression:

gegeben: N Stützpunkte $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $j \in \{1,\dots,N\}$

gesucht: Polynomfunktion p mit $\deg(p) << N$

Gleichungen: $p(x_j) = y_j$, $j \in \{1,\dots,N\}$

↳ N Gleichungen mit n Unbekannten $a_0,\dots,a_n$, $n << N$

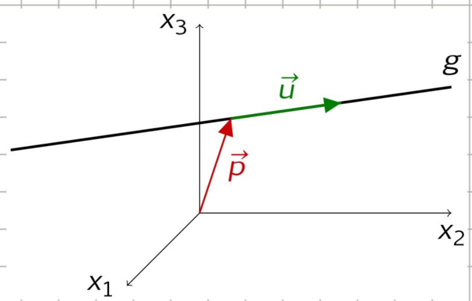
überbestimmtes LGS, können $a_0,\dots,a_n$ so bestimmen, dass Summe der quadratischen Abweichungen $\sum_{j=1}^{N}(y_j - p(x_j))^2$ minimal ist

-> kleinste-Quadrate-Lösung

Parameterform Gerade:

$g(x) = mx + q$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + m\Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \Delta x \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$



Differenzenquotient Potenzfunktion:

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{j=0}^{n-1} x_0^{n-1-j} x^j$$

Differenzenquotient Polynomfunktion:

$$\frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{x^i - x_0^i}{x - x_0} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} x_0^{i-1-j} x^j = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \sum_{j=1}^{i} x_0^{i-j} x^j = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_j x_0^{j-i-1} x^i$$

höhere Ableitungen Polynomfunktion:

$$p^{(k)}(x) = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} a_i x^{i-k} & k < n \\ n! a_n & k = n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

rationale Funktion

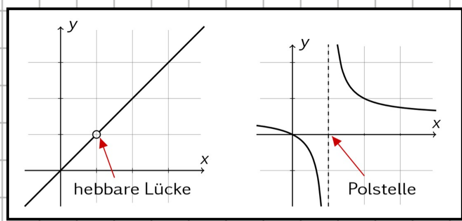
$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ heisst rational, falls Polynomfunktionen Z, N (N nicht Nullfunktion), so dass

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} \quad \forall x \in D$$

- ganzrational $\Leftrightarrow$ $0 = \deg(N)$ (Polynomfunktion)
- echt gebrochen rational $\Leftrightarrow$ $\deg(Z) < \deg(N)$
- unecht gebrochen rational $\Leftrightarrow$ $0 < \deg(N) \leqslant \deg(Z)$

Jede unecht gebrochenrationale kann durch Polynomdivision mit Rest in ganzrationalen und echt gebrochenrationalen Anteil zerlegt werden

Definitionslücken rationaler Funktionen



falls $N(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist Def.lücke von f

$$N(x) = (x-x_0)^{j_N} N_1(x), \quad N_1(x_0) \neq 0, \; j_N \in \mathbb{N}$$
$$Z(x) = (x-x_0)^{j_Z} Z_1(x), \quad Z_1(x_0) \neq 0, \; j_Z \in \mathbb{N}_0$$

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^{j_Z} Z_1(x)}{(x-x_0)^{j_N} N_1(x)}$$

x_0 heisst

- stetig hebbar falls $j_Z \geqslant j_N$

  durch j_N-mal Kürzen des Faktors $(x-x_0)$ erhält man:

  $$f_{\text{erweitert}}(x) = \frac{(x-x_0)^{j_Z - j_N} Z_1(x)}{N_1(x)}, \quad j_Z - j_N \geqslant 0, \qquad f(x_0) = \begin{cases} Z_1(x_0)/N_1(x_0), & j_Z = j_N \\ 0, & j_Z > j_N \end{cases}$$

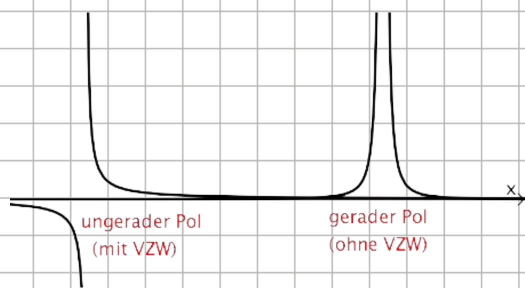
- Polstelle von f falls $j_Z < j_N$

  durch j_Z-mal Kürzen des Faktors $(x-x_0)$ erhält man

  $$f(x) = \frac{Z_1(x)}{(x-x_0)^{j_N - j_Z} N_1(x)}, \quad j_N - j_Z > 0$$

  $j_N - j_Z$ heisst Ordnung d. Polstelle x_0

  f wechselt Vorzeichen falls Ordnung ungerade



Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion

$$f(x) = p(x) + \frac{Z(x)}{N(x)}$$

nun muss man $N(x)$ in Linearfaktoren und über $\mathbb{R}$ irreduzible quadratische Faktoren zerlegen:

$$N(x) = a_n \prod_{i=1}^{l} (x - x_i)^{j_i} \prod_{i=1}^{m} (x^2 + b_i x + c_i)^{k_i}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\boxed{f(x) = p(x) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{r=1}^{j_i} \frac{A_{ir}}{(x-x_i)^r} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{k_i} \frac{B_{ir} x + C_{ir}}{(x^2 + b_i x + c_i)^r}}$$

Bestimmen der Koeffizienten A_{ir}, B_{ir}, C_{ir}

- falls $m = 0$ (ausschliesslich Linearfaktoren):

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Z(x)}{\prod_{i=1}^{l} (x - x_i)^{j_i}} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{r=1}^{j_i} \frac{A_{ir}}{(x - x_i)^r}$$

mit der Zuhaltemethode lassen sich die Koeffizienten zu den höchsten Potenzen bestimmen:

$$A_{i^* j_{i^*}} = \frac{Z(x_{i^*})}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i^*}}^{l} (x_{i^*} - x_i)^{j_i}}$$

mit Einsetzmethode erhält man Gleichungen für verbleibenden unbekannten Koeffizienten. man setzt dabei für x irgendwelche Zahlen, die keine Nullstellen des Nennerpolynoms sind, ein wodurch man ein LGS für die verbleibenden Koeffizienten erhält.

- falls $m \neq 0$ $\rightarrow$ direkte Methode:

$\frac{Z(x)}{N(x)}$ mit $N(x)$ führt auf $Z(x) = N(x) \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{r=1}^{j_i} \frac{A_{ir}}{(x-x_i)^r} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{k_i} \frac{B_{ir} x + C_{ir}}{(x^2 + b_i x + c_i)^r} \right)$

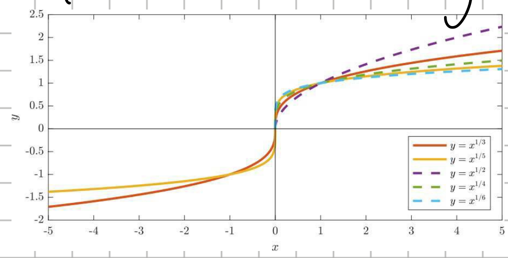
dann rechts kürzen un anschliessend Koeffizientenvergleich mit links

dies führt auf LGS für A_{ir}, B_{ir}, C_{ir}

n-te Wurzel

für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist n-te Wurzel $y = \sqrt[n]{x}$ definiert als reelle Lsg d. Gleichung $y^n = x$

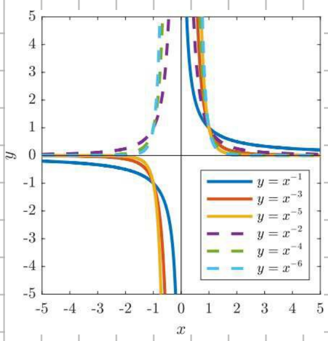
→ bei geraden n wählen wir nichtnegative Lsg



rationale Exponenten

$m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$x^{\frac{m}{n}} := \begin{cases} x^m & n = 1 \\ \sqrt[n]{x^m} & n > 1 \end{cases}$$



Def. bereich

$x^{m/n}$, $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$	$m > 0$ gerade	$m > 0$ ungerade	$m = 0$	$m < 0$ gerade	$m < 0$ ungerade
n gerade	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, \infty)$
n ungerade	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

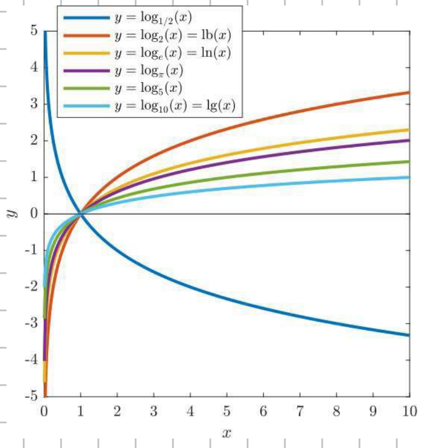
Logarithmen

$\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, $x > 0$ (Flächenfunktion)

gibt verschiedene Definitionen für reellen Logarithmus, welche äquivalent sind (z.B. Umkehrfunktion d. Exponentialfunktion, Potenzreihe, Lösung Funktionalgleichung)

natürlichen Logarithmus trifft auf natürliche Weise auf

$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$, $x > 0$



Eulersche Zahl (nach L. Euler 1707-1783)

$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist def. als Lsg. d. Gleichung $\ln(x) = 1$

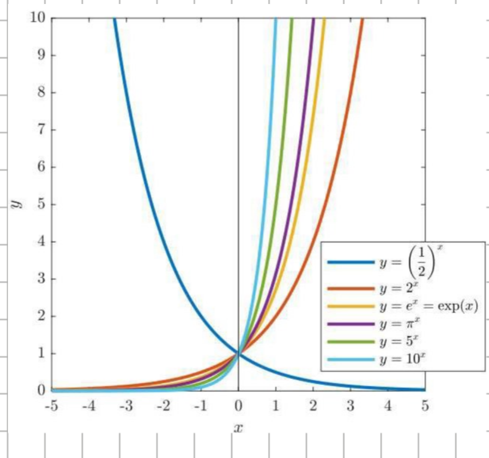
Rechenregeln f. Logarithmen

1. $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
2. $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$
3. $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$, $a > 0$, $a \neq 1$

Exponentialfunktion

$\exp(x) :=$ Lösung d. Gleichung $\ln(y) = x$

$a^x := \exp(x \ln(a))$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$



Basiswechsel Exp. f.

$a^x = \left(b^{\log_b(a)}\right)^x = b^{x \log_b(a)}$

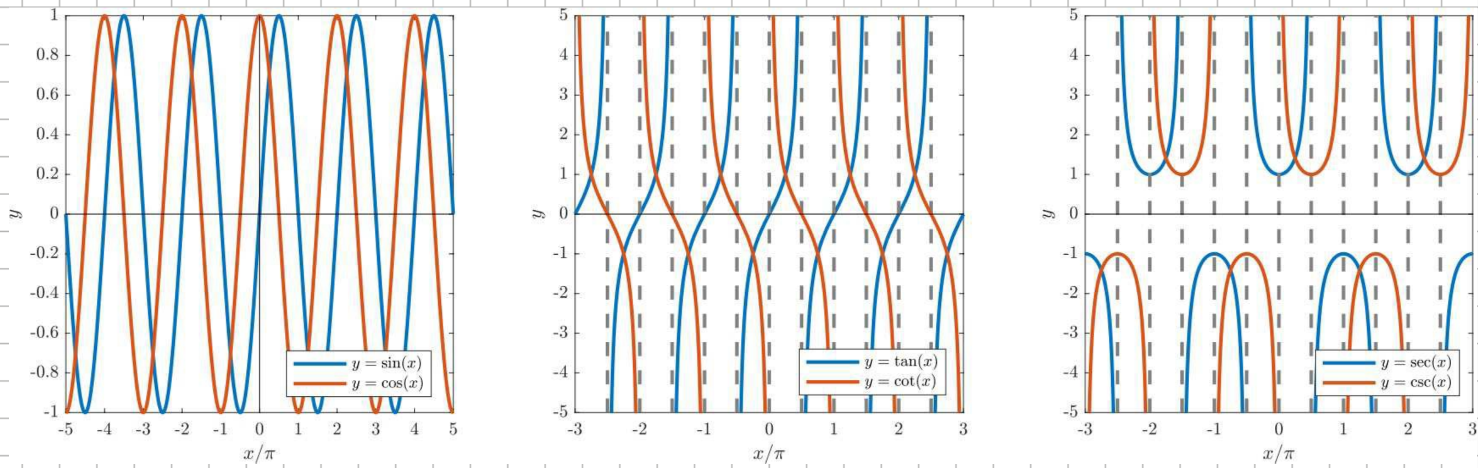
irrationale reelle Potenz

$$x^r := \exp(r\ln(x)),\ x>0,\ r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

trigon. Funktionen

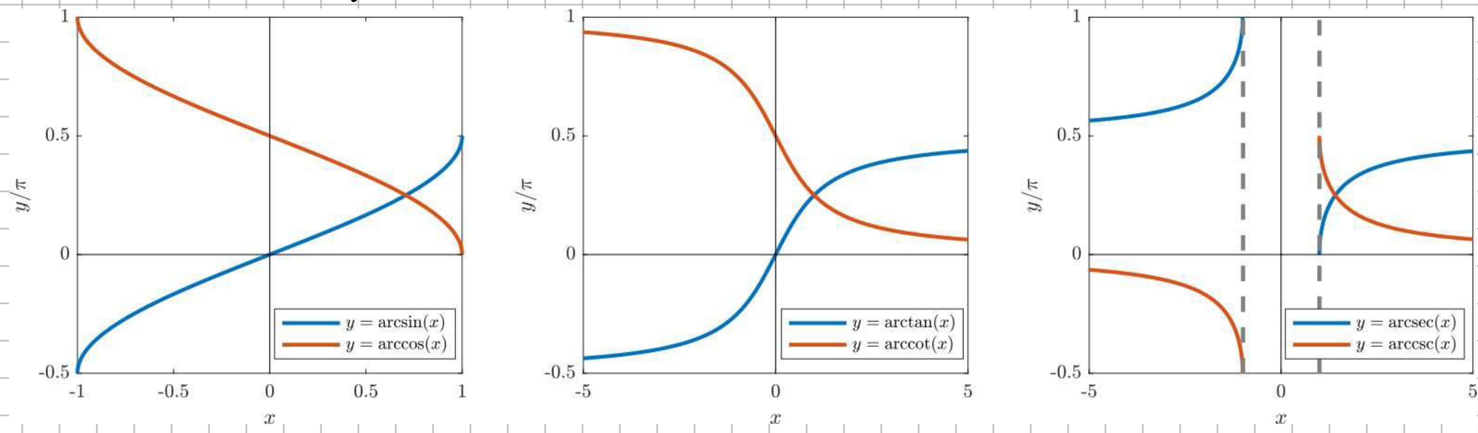
$$\sin(\alpha) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}},\quad \cos(\alpha) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},\quad \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)},\quad \sec(x) := \frac{1}{\cos(x)},\quad \cot(x) := \frac{1}{\tan(x)}$$



Arkusfunktionen

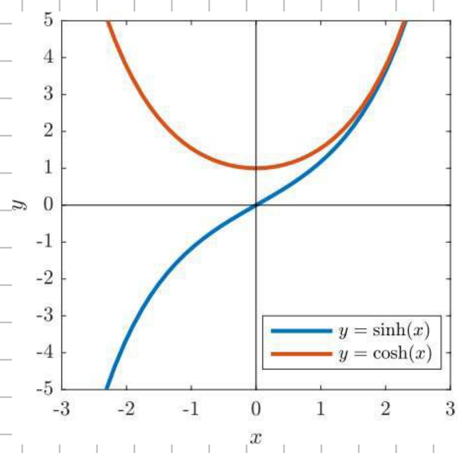
Lsg'en von Gleichungen von trig. Funkt. in festgelegtem Intervall

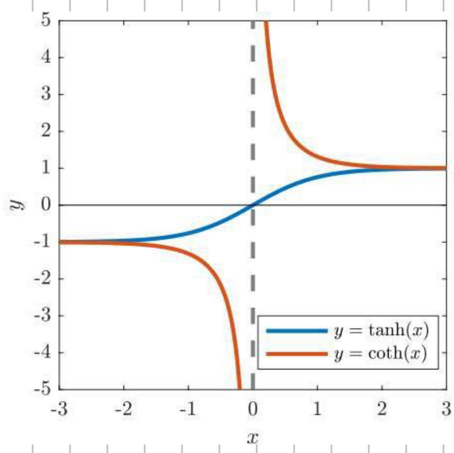


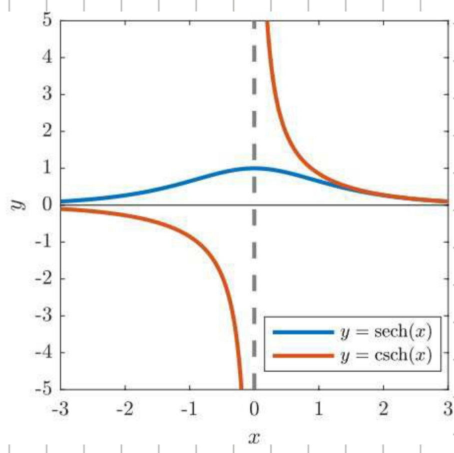
Hyperbelfunktionen

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2},\quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

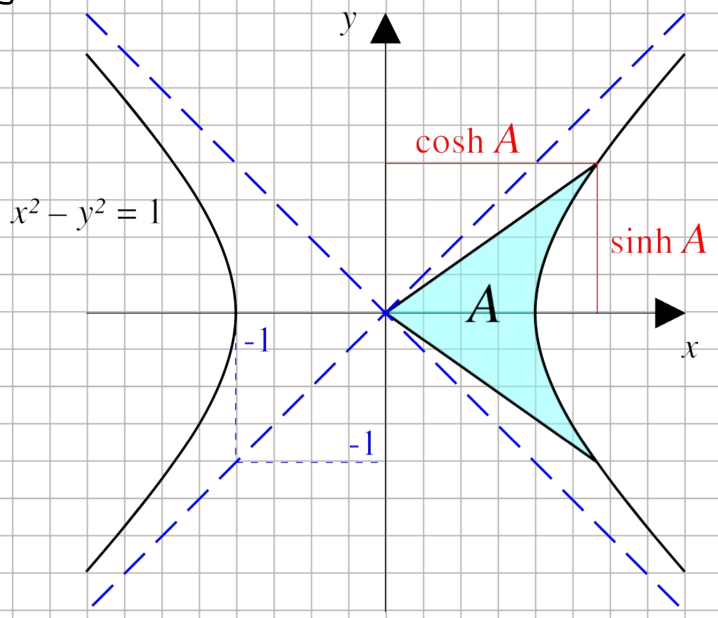
$$\text{csch}(x) := \frac{1}{\sinh(x)},\quad \text{sech}(x) := \frac{1}{\cosh(x)},\quad \coth(x) := \frac{1}{\tanh(x)}$$







geometrische Definition:



Gerade aus Ursprung schneidet Einheitshyperbel $x^2-y^2=1$ im Punkt (cosh(A), sinh(A)), wobei A die Fläche zwischen Geraden, ihrem Spiegelbild, und der Hyperbel ist

Areafunktionen

Lsg'en von Gleichungen von Hyperbelfunktionen

Eigenschaften d. trigonometrischen und Hyperbelfunktionen

1. *Trigonometrischer Pythagoras:*
   $\sin^2 + \cos^2 = \sec^2 - \tan^2 = \csc^2 - \cot^2 = 1.$
2. *Komplementärwinkel:* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.
3. *Symmetrie: Die Sinusfunktion ist ungerade,* $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. *Die Kosinusfunktion ist gerade,* $\cos(-x) = \cos(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
4. *Zwischen den trigonometrischen und den Arkusfunktionen gelten die Zusammenhänge*

$$\begin{aligned}
\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) &= \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1], \\
\cot(\mathrm{arccsc}(x)) = \tan(\mathrm{arcsec}(x)) &= \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1).
\end{aligned}$$

5. *Additionstheoreme:*

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \tag{104}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \tag{105}$$

6. *Spezielle Grenzwerte:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \tag{106}$$

1. *Hyperbolischer Pythagoras:*
   $\cosh^2 - \sinh^2 = \mathrm{sech}^2 + \tanh^2 = \coth^2 - \mathrm{csch}^2 = 1.$
2. *Zwischen den Hyperbel- und den Areafunktionen gelten die Zusammenhänge*

$$\begin{aligned}
\cosh(\mathrm{arsinh}(x)) &= \sqrt{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\sinh(\mathrm{arcosh}(x)) &= \sqrt{x^2-1}, \quad x \in [1,\infty), \\
\coth(\mathrm{arcsch}(x)) &= \frac{x}{|x|}\sqrt{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
\tanh(\mathrm{arsech}(x)) &= \sqrt{1-x^2}, \quad x \in (0,1].
\end{aligned}$$

komplexe Exponentialfunktion

Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$:

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto e^z := \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$e^z = e^{s+it} = e^s e^{it} \qquad e^s \in \mathbb{R} \qquad |e^{it}| = 1$$

Eulersche Formel

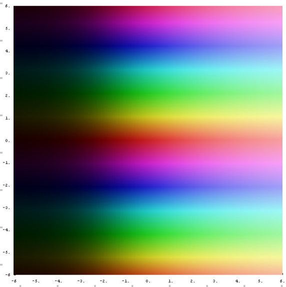
$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$
$$= \text{cis}(t + 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Eulersche Zahl:

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

"schönste Gleichung der Mathematik"



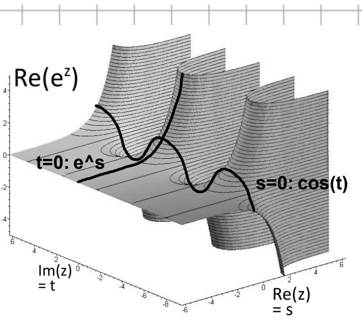
Farbcodierte Darstellung der komplexen Exponentialfunktion

x-Achse:	Re(z)
y-Achse:	Im(z)
Farbe:	$\arg(e^z)$
Helligkeit:	$\lvert e^z \rvert$

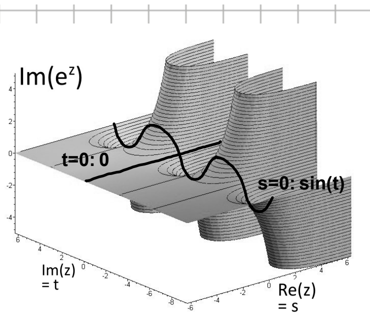
Dunklel bedeutet betragsmässig kleine Funktionswerte, hell bedeutet betragsmässig grosse Funktionswerte. Die Grundfarbe stellt das Argument des Funktionswertes dar (Winkel relativ zu reellen Achse). Die sich wiederholenden Farbbänder lassen deutlich erkennen, dass die Funktion in imaginärer Richtung periodisch ist.

Plots: Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$:

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto e^z = e^{s+it} = e^s e^{it} = e^s(\cos(t) + i\sin(t))$$



Realanteil der komplexen Exponentialfunktion



Imaginäranteil der komplexen Exponentialfunktion

$t = 0$: $\quad e^{s+it} = e^s \quad \Rightarrow \quad \text{Re}(e^z) = e^s, \quad \text{Im}(e^z) = 0$

$s = 0$: $\quad e^{s+it} = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \quad \Rightarrow \quad \text{Re}(e^z) = \cos(t), \quad \text{Im}(e^z) = \sin(t)$

cis-Funktion

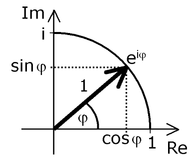
$$\text{cis} : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \qquad S^1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$$

$$\text{cis}(t) := e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \qquad |e^{it}| = 1$$

oder in zwei Formeln für Real- und Imaginärteil ausgedrückt:

$$\cos(t + 2\pi k) = \text{Re}\left(e^{it}\right) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

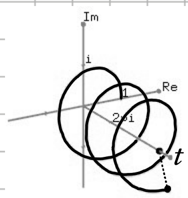
$$\sin(t + 2\pi k) = \text{Im}\left(e^{it}\right) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Bemerkungen:

i) Der Name "cis" für diese Funktion ist eine Abkürzung für "cosinus plus i mal sinus".

ii) Die Abbildung cis bildet die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (stetig) auf den Einheitskreis ab S^1 in der komplexen Ebene ab.



Plot:

cis-Funktion

$$\text{cis} : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \longmapsto e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \qquad |e^{it}| = 1$$

Kartesische Form / Polarform/Exponentialform:

$$z = \begin{cases} x + iy & \text{kartesische Form} \\ r\text{cis}(\varphi + k \cdot 2\pi) & \text{Polarform} \\ re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i} & \text{Exponentialform} \end{cases}$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig.

kartesische Form $\longrightarrow$ Polarform/Exponentialform:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi := \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0 \ \wedge \ y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \ \wedge \ y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \ \wedge \ y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \ \wedge \ y \geq 0 \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0, \end{cases}$$

wobei $\boxed{\varphi \in \left]-\pi, \pi\right]}$ oder mit dem Arcuscosinus:

$$\varphi := \arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y < 0 \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0, \end{cases}$$

Polarform/Exponentialform $\longrightarrow$ kartesische Form:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Rechnen in $\mathbb{C}$

- Addition/Subtraktion: Kartesische Form gut geeignet

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

- Multiplikation/Division: Exponentialform gut geeignet

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\varphi_1 + k \cdot 2\pi i} \\ z_2 &= r_2 e^{i\varphi_2 + k \cdot 2\pi i} \end{aligned} \right\} \Longrightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1 + k \cdot 2\pi i} \cdot r_2 e^{i\varphi_2 + k \cdot 2\pi i}$$

- Potenzen: Exponentialform gut geeignet

$$z = re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i} \Longrightarrow z^n = (re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i})^n$$

Gleichungen lösen in $\mathbb{C}$

Wir suchen die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von der Gleichung

$$z^n = c$$

wobei $c \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben sind.

Vorgehen

❶ Schreibe c in die Exponentialform um:

$$c = re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

❷ Ziehe auf beiden Seiten der Gleichung die n-te Wurzel. Wir erhalten n verschiedene Lösungen

$$z_k = \left(re^{i\varphi + k2\pi i}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

❸ Falls gefragt, wandle die gefundene Lösung (in Exponentialform) um in die Polarform bzw. kartesische Form