Signalbeschreibung im Zeitbereich

Signal: Funktion, welche jedem Punkt der reellen Achse als Zeitstrahl einen reellen Wert zuweist

System: Funktion, welche ein Eingangs- in ein Ausgangssignal transformiert

(mittlere) normierte Signalleistung P:

$$\boxed{P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt}$$

(mittlere) normierte Signalenergie E:

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt}$$ (Energie = Leistung · Zeit)

Signalklassen

Leistungssignale

- $0 < P < \infty$ bzw. $E = \infty$
- zeitlich unbegrenzt ohne abklingende Amplitude
- peridische Signale sind Leistungssignale
  - für alle t gilt: $x(t + T_0) = x(t)$, wobei kleinstes T_0 die Periode ist
  - Grundfrequenz: $f_0 = \frac{1}{T_0}$
  - (mittlere) normierte Signalleistung: $P = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x^2(t) \, dt$
  - Effektivwert bzw. RMS-Wert: $X_{RMS} = \sqrt{P}$

bei cos- oder sin-förmigen Signal mit Amplitude A gilt:
$P = \frac{A^2}{2}$
$X_{RMS} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

Energiesignale

- $0 < E < \infty$ bzw. $P = 0$
- zeitlich begrenzte Signale (z.B. Einzelimpuls)
- zeitlich unbegrenzte Signale mit abklingender Amplitude (z.B. Ausschwingvorgänge)

kausale Signale

- für $t < 0$ gleich 0

komplexe Signale

- komplexwertig, d.h. $x(t) = x_{real}(t) + j \cdot x_{imag}(t)$
- Umhüllende: $|x(t)|$

deterministische Signale

- können exakt vorhergesagt und beschrieben werden
- tragen keine Information, sind aber wichtige Hilfssignale

stochastische Signale

- Beschreibung nur mit stochastischen Kenngrössen
- tragen Information oder stellen Rauschen dar

analoge Signale	zeitkont.	wertkont.
zeitdiskrete Signale	zeitdiskr.	wertkont.
digitale Signale	zeitdiskr.	wertdiskr.

↓ Abtastung
↓ Quantisierung

wichtige Signale

unit step / heaviside

- distributive Ableitung: $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 1/2 & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

Rechteck

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t|<1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dreieck

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t|<1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dirac

- Distribution, keine Funktion
- Darstellung als Pfeil, allenfalls mit «Gewicht»
- Normierungseigenschaft: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$

$$\delta(t) \approx \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Exponential

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t/\tau} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = u(t)e^{-t/\tau}$$

Signum

- distributive Ableitung: $\frac{d}{dt}sgn(t) = 2\delta(t)$

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

sinc

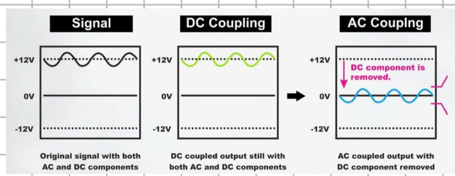
- Nullstellen bei Vielfachen von $T_0 = 1/f_0$

$$sinc_{f_0}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t} & t\neq 0 \\ 1 & t=0 \end{cases}$$

Mittelwertbegriffe

Linearer MW / Gleichanteil / DC-Wert

$$X_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \approx \frac{1}{NT_s}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)T_s = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)$$



quadratischer MW / mittl. norm. Leistung

$$X^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt$$

Effektivwert / RMS

$$\boxed{X_{RMS} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt} = \sqrt{X^2}}$$

Fourierreihe

Umrechnung zwischen Darstellungsarten $n \geq 0$

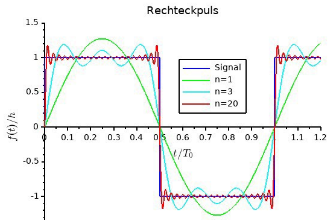
$a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_n), \quad b_n = -2 \cdot \mathrm{Im}(c_n)$

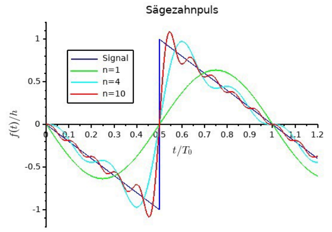
$c_n = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}$

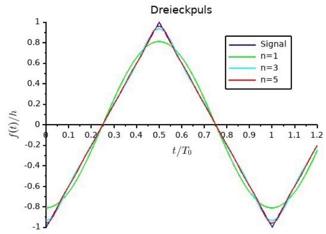
$a_n = A_n \cos(\varphi_n), \quad b_n = -A_n \sin(\varphi_n)$

$A_n = 2\,|c_n|, \quad \varphi_n = \arg(c_n)$

$c_n = \frac{A_n}{2}\mathrm{cis}(\varphi_n) \qquad DC = C_0 = \frac{a_0}{2}$







Symmetrieeigenschaften

Komplexe Schreibweise:

a_0: Konstanter Anteil (DC-Anteil), entspricht einer Verschiebung von $f(t)$ nach unten und oben. $DC = \frac{a_0}{2} = C_0 \triangleq$ arithmetischem Mittelwert (ET: Gleichwert)

$b_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$: **Gerade** Funktionen enthalten nur $\cos(n\omega t)$-Schwingungen. $\cos(-x) = \cos(x)$ → alle Koeffizienten rein reell

$a_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$: **Ungerade** Funktionen enthalten nur $\sin(n\omega t)$-Schwingungen. $\sin(-x) = -\sin(x)$ → alle Koeffizienten rein imaginär

Durch Verschiebung von $f(t)$ nach links oder rechts, kann bei Bedarf eine periodische Funktion immer gerade oder ungerade gemacht werden.

reelle Schreibweise

Die Menge der periodischen Funktionen (mit Perdiode $T > 0$) sind ein VR. Wir benötigen aber ein Skalarprodukt, daher benutzen wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$L^2([0,T]) := \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_0^T |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

und meinen damit, dass man die Funktion über das Intervall $[0, T]$ einfach periodisch fortsetzt. In $L^2([0, T])$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$$

Bezüglich diesem Skalarprodukt sind die Funktionen

$$g_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g_n(t) := \cos(n\omega t),\ n \in \mathbb{N},$$
$$h_m(t) := \sin(m\omega t),\ m \in \mathbb{N}.$$

orthonormiert und bilden so etwas wie eine ONB. (⇒ Serie 4, Aufgabe 4)

Wegen Kor. 5.6.10 folgt: Jede beliebige Funktion $f \in L^2([0, T])$ kann geschrieben werden als unendliche Linearkombination

$$DC \quad \boxed{f(t) = \boxed{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).}$$

ω = Grundkreisfrequenz: ggT der vorhandenen Kreisfrequenzen

Dies ist die **Fourierreihe** von $f(t)$ mit den **Fourierkoeffizienten**

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt, \quad DC = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \\ a_n &= \langle g_n(t), f(t)\rangle_{L^2} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt, \quad n \in \mathbb{N} \\ b_m &= \langle h_m(t), f(t)\rangle_{L^2} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)dt, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}}$$

Die periodische Funktion $f(t)$ wird zerlegt in einen konstanten Anteil (DC-Anteil) $a_0/2$ und eine Überlagerung einer Grundschwingung ("Grundton", $n = 1$) und Vielfachen davon ("Obertöne", $n > 1$).

komplexe Schreibweise

Wir haben in LinAlg1 gesehen, dass sich alles, was mit Schwingungen zu tun hat, einfacher in $\mathbb{C}$ darstellen lässt. Wir verallgemeinern also die Konzepte von oben auf $\mathbb{C}$:

$$L^2([0,T]) := \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_0^T |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

$\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}g(t)dt$$

$$\boxed{\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

Bezüglich diesem Skalarprodukt sind die Funktionen

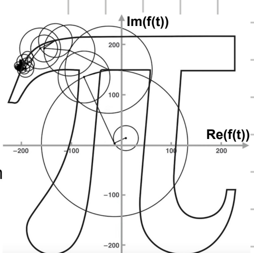
$$e_k(t) := e^{ik\omega t},\ k \in \mathbb{Z},$$

eine Art ONB.

Wie im reellen Fall folgt: Jede Funktion $f(t) \in L^2([0, T])$ kann als unendliche Linearkombination (also als Reihe) der Basisvektoren geschrieben werden, also

DC: $C_0 e^{i0\omega t} = C_0 \cdot 1 = C_0$

$$\boxed{f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{ik\omega t}.}$$



Die (jetzt komplexen) Fourier-Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ sind gegeben durch

$$\boxed{c_k = \langle e_k(t), f(t)\rangle_{L^2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Amplituden-Phasen-Form

Es gibt noch eine weitere mögliche Schreibweise für die Fourier-Reihe, nämlich die **Amplituden-Phasen-Form**.

$$DC \quad f(t) = \boxed{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

Das Fourier-Spektrum besteht in dieser Form aus den Amplituden $A_n > 0$ und den Phasenverschiebungen φ_n.

Zusammenhang mit reeller Schreibweise:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(\varphi_n)\cos(n\omega t) - A_n \sin(\varphi_n)\sin(n\omega t)\right). \end{aligned}$$

2. **Fourierkoeffizienten erkennen**

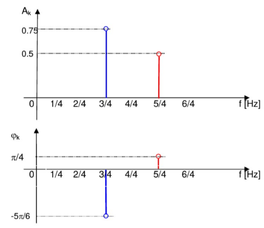
$$x(t) = \frac{3}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Geben Sie die Fourierkoeffizienten von $x(t)$ in der Amplitude-Phase-Notation (A_k, φ_k) an und stellen Sie es das Spektrum graphisch dar.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{3}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{3}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t - \frac{5\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$A_k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3,5\}$, $A_3 = \frac{3}{4}$ und $A_5 = \frac{1}{2}$

$\varphi_k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3,5\}$, $\varphi_3 = -\frac{5\pi}{6}$ und $\varphi_5 = \frac{\pi}{4}$



3. **Fourierkoeffizienten ablesen**

Gegeben ist die periodische Funktion

$$x(t) = \frac{\pi}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}t\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$$

a) Lesen Sie die Grundkreisfrequenz ω ab und bestimmen Sie daraus die Grundfrequenz f und die Periodendauer T.
b) Welches ist die DC-Komponente von $x(t)$?
c) Welche Symmetrieeigenschaften hat die Funktion $x(t)$?
d) Wie lauten die komplexen Fourierkoeffizienten c_k der Funktion $x(t)$?

a) Die Grundkreisfrequenz ist der grösste gemeinsame Teiler der vorhandenen Kreisfrequenzen, also

$$\omega = \frac{\pi}{6}$$

und damit sind Frequenz und Periodendauer

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{12}\,\mathrm{Hz} \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{f} = 12\,\mathrm{s}.$$

b) Die DC-Komponente ist der konstante Term in $x(t)$, also

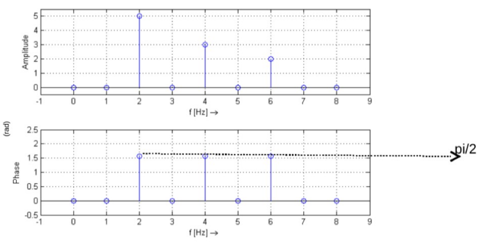
$$c_0 = \frac{\pi}{4}.$$

c) Die Funktion $x(t)$ enthält nur Cosinus-Terme, es ist also eine gerade Funktion.

d) Aufgrund der Symmetrie sind alle komplexen Fourierkoeffizient c_k ebenfalls reell. Wir erhalten neben c_0 noch:

$$c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}, \quad c_5 = c_{-5} = \frac{1}{2}, \quad \text{und} \quad c_{16} = c_{-16} = \frac{1}{2}$$

4. **Signalbeschreibung im Frequenzbereich**



a) Schreiben Sie die Funktion $y(t)$ auf.
b) Weist $y(t)$ eine Symmetrie auf?

a) Die Grundfrequenz ist offensichtlich $f = 2\,\mathrm{Hz}$ und damit $\omega = 2\pi f = 4\pi\,\mathrm{s}^{-1}$.

$$\begin{aligned} y(t) &= 5\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(12\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -5\sin(4\pi t) - 3\sin(8\pi t) - 2\sin(12\pi t) \end{aligned}$$

b) Die reelle Schreibweise $y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ enthält nur Koeffizienten b_k, also ist die Funktion ungerade.

5. **Sinus zum Quadrat**

Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe der Funktion

$$x(t) = \sin^2(t).$$

Das heisst, bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω und die Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ der Fourier-Reihe

$$\sin^2(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right).$$

Hinweis:
Schreiben Sie die Sinus-Funktion mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion (Euler-sche Formel). Sie müssen keine Fourier-Integrale berechnen.

Die Periodendauer der Funktion $\sin^2(t)$ ist π, also gilt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.$$

Zudem ist $\sin^2(t)$ eine gerade Funktion, also ist schon klar, dass $b_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Mit der Eulerschen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin^2(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2it} - 2 + e^{-2it}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t). \end{aligned}$$

Also finden wir reelle Fourier-Koeffizienten $a_0 = 1$ und $a_1 = -\frac{1}{2}$, sowie $a_m = 0$ für $m \geq 2$.

Abnahme d. hochfr. Harmonischen

$1/k$ falls unstetige (Sprun-) Stellen
$1/k^2$ falls stetige nicht diff'bare (Knick-) Stellen

Klirrfaktor (für DC-freies Signal)

$$\boxed{k = \frac{X_{rms\text{-}Oberschwingungen}}{X_{rms}} = \frac{\sqrt{P-P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{M_2^2+M_3^2+\dots}}{\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2+\dots}}}$$

idealer Verstärker: $k = 0\%$
realer Verstärker: $k = 0.01\% - 1\%$ (ca.)

Oberschwingungen → Mass für Abweichung von reinem Sinus/Cosinus

Numerische Approximation d. Fourierkoeff.

$$A_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)\cos(2\pi k f_0 t)\,dt \approx \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\cos\left(2\pi\frac{kn}{N}\right) \qquad k \geq 0$$

$$B_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)\sin(2\pi k f_0 t)\,dt \approx \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\sin\left(2\pi\frac{kn}{N}\right) \qquad k \geq 1$$

Matlab mit for:

```
N=1e4; % Abtastwerte pro Periode
s=[ones(1,N/2) (-1)*ones(1,N/2)]; % 1 Periode Rechtecksignal
k=1; % z.B. Berechnung von B1
B=0; % Initialisierung
for n = 0:N-1 % Approximation Integral
        B = B + s(n+1)*sin(2*pi*k*n/N);
end
B=(2/N)*B % Bildschirm-Ausgabe Bk-Koeffizient, B1=4/pi
```

Matlab mit 2 Vektoren:

```
N=1e4; % Abtastwerte pro Periode
s=[ones(1,N/2) (-1)*ones(1,N/2)]; % Signalvektor (1 Periode)
k=1; % z.B. Berechnung von B1
w=sin(2*pi*k*[0:N-1]/N); % [sin(2*pi*k*0/N)...sin(2*pi*k*(N-1)/N)]
summanden = s.*w; % elementweise Multiplikation Signal- mit sin-Vektor
B=(2/N)*sum(summanden) % Bildschirm-Ausgabe Bk-Koeffizient, B1=4/pi
```

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)\,e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt \approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\exp\left(-j2\pi\frac{kn}{N}\right)$$

Matlab:

```
N=1e4; % Abtastwerte pro Periode
s=[ones(1,N/2) (-1)*ones(1,N/2)]; % Signalvektor (1 Periode)
k=1; % z.B. Berechnung von c1
w=exp(-j*2*pi*k*[0:N-1]/N);
c=(1/N)*sum(s.*w) % Bildschirm-Ausgabe ck-Koeffizient, c1=-(2/pi)*j
```

Zusammenfassung FR

Sinus-/Cosinus-Darstellung der Fourierreihe

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2\pi \cdot kf_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(2\pi \cdot kf_0 \cdot t)$$

wobei

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cdot \cos(2\pi \cdot kf_0 \cdot t)\, dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cdot \sin(2\pi \cdot kf_0 \cdot t)\, dt \quad \text{für } k \geq 1$$

Betrag-Phasen-Darstellung der Fourierreihe

$$s(t) = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cdot \cos(2\pi \cdot kf_0 \cdot t + \varphi_k)$$

wobei

$$M_0 = \frac{A_0}{2} \quad \text{und} \quad M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}\,, \quad \varphi_k = -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \quad \text{für } k > 0$$

Komplexe Darstellung der Fourierreihe

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \cdot kf_0 \cdot t} \quad \text{wobei} \quad c_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot kf_0 \cdot t}\, dt$$

Umrechnung der Koeffizienten siehe [5, Kapitel 7.2.4, S. 285]

DC-Komponenten: $c_0 = M_0 = A_0/2$

AC-Komponenten:

$k \neq 0$	(A_k, B_k)-Koeffizienten	(M_k, φ_k)-Koeffizienten	c_k-Koeffizienten
$A_k =$ $B_k =$	A_k B_k	$M_k \cdot \cos(\varphi_k)$ $-M_k \cdot \sin(\varphi_k)$	$c_k + c^*_k = 2 \cdot \mathrm{Re}\{c_k\}$ $j(c_k - c^*_k) = -2 \cdot \mathrm{Im}\{c_k\}$
$M_k =$ $\varphi_k =$	$\sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ $-\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$	M_k φ_k	$2 \cdot \lvert c_k \rvert$ $\arg\{c_k\}$
$c_k =$	$\begin{cases} (A_k - j \cdot B_k)/2 & k > 0 \\ (A_k + j \cdot B_k)/2 & k < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{M_k}{2} \cdot e^{j\varphi_k} & k > 0 \\ \frac{M_k}{2} \cdot e^{-j\varphi_k} & k < 0 \end{cases}$	c_k

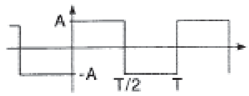
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

$$\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Mittlere, normierte Leistung (Satz von Parseval):

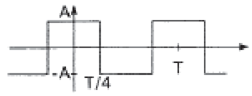
$$P_n = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \quad = M_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^2}{2} \quad = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2 + B_k^2}{2} \quad = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k \rvert^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

(1)


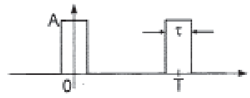
antisymmetrische Rechteckfunktion, Tastgrad 0.5, gleichanteilfrei

$$f(t) = A \cdot \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t \ldots \right)$$

(2)


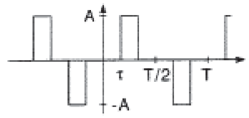
symmetrische Rechteckfunktion, Tastgrad 0.5, gleichanteilfrei

$$f(t) = A \cdot \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \ldots \right)$$

(3)


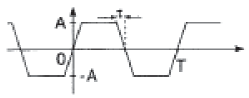
Rechteckimpulse, Tastgrad τ/T

$$f(t) = A \cdot \frac{\tau}{T} + A \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sin \pi \frac{\tau}{T} \cdot \cos \omega t + \frac{1}{2} \sin \pi \frac{2\tau}{T} \cdot \cos 2\omega t + \ldots \right)$$

(4)


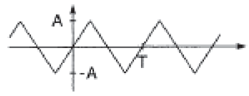
Bipolarer Rechteckimpuls, Halbwellensymmetrie, Hilfsgröße $\varphi = 2\pi\tau/T$.

$$f(t) = A \cdot \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos \varphi}{1} \sin \omega t + \frac{\cos 3\varphi}{3} \sin 3\omega t + \frac{\cos 5\varphi}{5} \sin 5\omega t + \ldots \right)$$

(5)


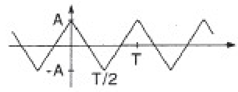
Trapezschwingung, Anstiegszeit = Abfallzeit = τ. Hilfsgröße $a = 2\pi\tau/T$.

$$f(t) = \frac{A}{a} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin a}{1^2} \sin \omega t + \frac{\sin 3a}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{\sin 5a}{5^2} \sin 5\omega t + \ldots \right)$$

(6)


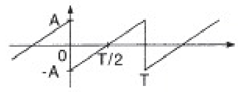
antisymmetrische Dreieckschwingung mit Halbwellensymmetrie, gleichanteilfrei

$$f(t) = A \cdot \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \ldots \right)$$

(7)


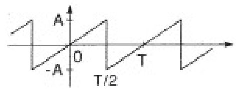
symmetrische Dreieckschwingung mit Halbwellensymmetrie, gleichanteilfrei

$$f(t) = A \cdot \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega t + \ldots \right)$$

(8)


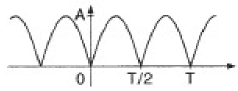
Sägezahnschwingung, gleichanteilfrei, Antisymmetrie

$$f(t) = -A \cdot \frac{2}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \ldots \right)$$

(9)


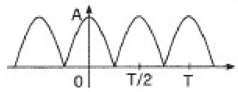
Sägezahnschwingung, gleichanteilfrei, Antisymmetrie

$$f(t) = A \cdot \frac{2}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \ldots \right)$$

(10)


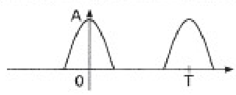
Sinusschwingung nach Doppelweg-Gleichrichtung, Vollwellensymmetrie, T: Periode der Netzfrequenz

$$f(t) = A \cdot \frac{2}{\pi} - A \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t + \ldots \right)$$

(11)


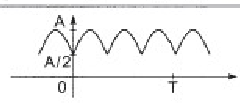
Kosinusschwingung nach Doppelweg-Gleichrichtung, Vollwellensymmetrie, T : Periode der Netzfrequenz

$$f(t) = A \cdot \frac{2}{\pi} + A \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \ldots \right)$$

(12)


Kosinusschwingung nach Einweggleichrichtung

$$f(t) = A \cdot \frac{1}{\pi} + A \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \ldots \right)$$

(13)


Gleichgerichteter Drehstrom, T: Periode der Netzfrequenz.

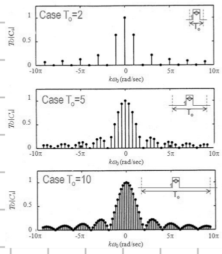
$$f(t) = A \cdot \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 3\omega t - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \frac{1}{8 \cdot 10} \cos 9\omega t - \ldots \right)$$

Fouriertransformation

Fourier-Reihe

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}, \quad c_k = f_0 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

periodisches Signal: diskretes Linienspektrum
Summe einzelner Harmonischen bei Vielfachen von f_0
→ c_k enthält Amplitude und Phase der k-ten Harmonischen



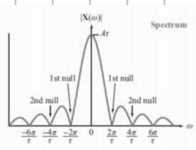
$$S(f) = \lim_{f_0 \to 0} \left(\frac{c_k}{f_0}\right) \Rightarrow f_0 \mathrel{\hat{=}} df, \quad kf_0 \mathrel{\hat{=}} f$$

$T_0 \to \infty$

Fourier-Transformation

$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \circ\!\!-\!\!\bullet\ S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt}$$

n.-periodisches Signal: kontinuierliches Amplituden-Dichte-Spektrum
Summe (Integral) von Spektralkomponenten aller Frequenzen
→ $S(f)$ enthält Amplitude und Phase der Frequenzkomponente f



$$\underbrace{S(f)}_{\text{Fourierspektrum}} = \underbrace{|S(f)|}_{\text{Betragsspektrum}} \cdot e^{j\overbrace{\varphi(f)}^{\text{Phasenspektrum}}}$$

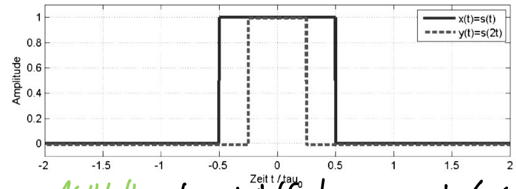
Zeit-Bandbreite-Produkt / Unschärferelation

$$\mathcal{F}\{s(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(at) e^{-j2\pi ft} dt \;\left|{u=at \atop dt=\frac{du}{a}}\right|\; \int_{u(-\infty)}^{u(\infty)} s(u) e^{-j2\pi f \frac{u}{a}} \frac{1}{a} du$$

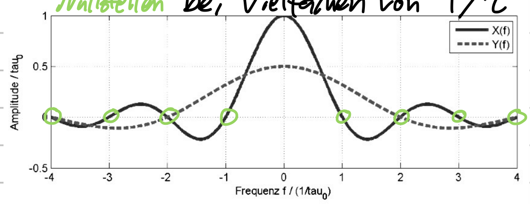
$$= \int_{u(-\infty)}^{u(\infty)} s(u) e^{-j2\pi f \frac{u}{a}} \frac{1}{a} du = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} s(u) e^{-j2\pi \frac{f}{a} u} du = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

=> Bandbreite und Dauer eines Pulssignals können nicht unabhängig voneinander gewählt werden

=> Zeit-Bandbreite-Produkt: $\tau \cdot B \approx 1$

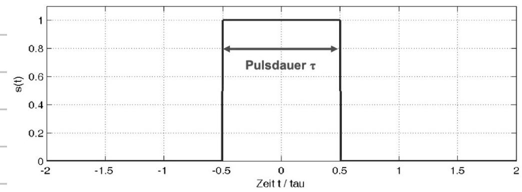


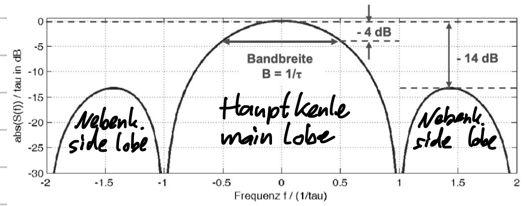
Nullstellen bei Vielfachen von $1/\tau$



günstig
3dB-Bandbreite: 100MHz
=> Pulse mit ca. 10ns noch sichtbar

teuer
3dB-Bandbreite: 4GHz
Pulse mit ca. 0.25ns noch sichtbar

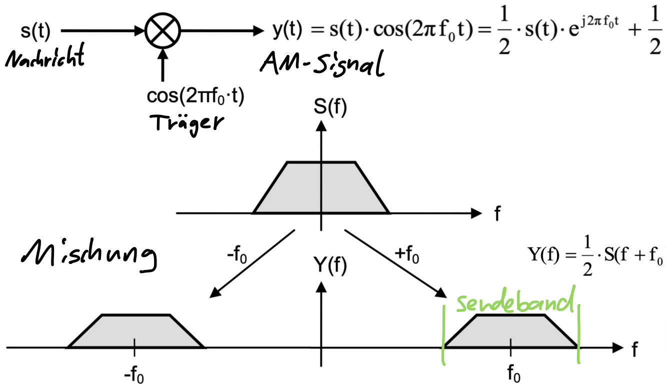




Extremform: Dirac / DC:

unendlich schmaler Puls => weisses Spektrum
DC-Signal => unendlich schmale Linie bei $f=0$

Amplitudenmodulation (AM) mit Frequenzverschiebung



hochfrequentes Signal kann über Antenne abgestrahlt werden

DGL

DGL ○—● algebraische Gleichung

man darf jede Ableitung durch $j2\pi f$ und jedes Integral durch $1/(j2\pi f)$ ersetzen

Strom-Spannung-Beziehung elektrischer Bauelemente:

$$\left.\begin{array}{l} u(t) = R\,i(t) \\ i(t) = C\,\frac{d}{dt}u(t) \\ u(t) = L\,\frac{d}{dt}i(t) \end{array}\right\} \circ\!\!-\!\!\bullet \left\{\begin{array}{l} \underline{U} = R\,\underline{I} \\ \underline{I} = C\,j2\pi f\,\underline{U} \\ \underline{U} = L\,j2\pi f\,\underline{I} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{Z_R} = R \\ \underline{Z_C} = 1/(j\omega C) \\ \underline{Z_L} = j\omega L \end{array}\right.$$

Impedanz (komplexer Widerstand):

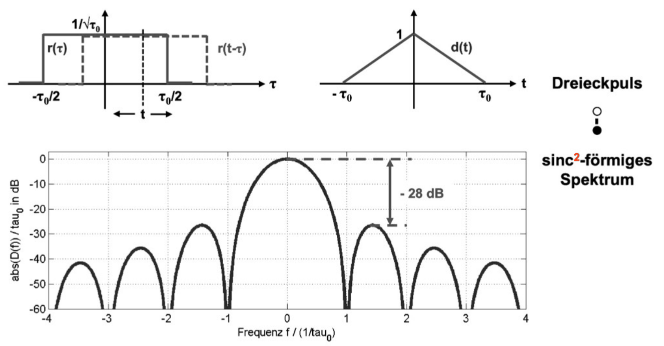
$$\boxed{\underline{Z} = \underline{U}(f)/\underline{I}(f)}$$

Faltung

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot y(t-\tau)\,d\tau \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(f)\cdot Y(f)$$

neutrales Element: $\delta(t)$, da $\delta(t) * x(t) = x(t)$

Faltung Rechteckpuls der Dauer τ_0 mit sich selbst



$$\mathrm{rect} * \mathrm{rect} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\,\mathrm{rect}(t-\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0 & t<-\tau_0 \\ \int_{-\tau_0/2}^{t+\tau_0/2} \frac{1}{\tau_0}\,d\tau & -\tau_0\le t\le 0 \\ \int_{t-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \frac{1}{\tau_0}\,d\tau & 0<t\le\tau_0 \\ 0 & \tau_0<t \end{cases} = \begin{cases} 0 & t<-\tau_0 \\ \frac{1}{\tau_0}(\tau_0+t) & -\tau_0\le t\le 0 \\ \frac{1}{\tau_0}(\tau_0-t) & 0<t\le\tau_0 \\ 0 & \tau_0<t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t<-\tau_0 \\ \frac{1}{\tau_0}(\tau_0-|t|) & -\tau_0\le t\le\tau_0 \\ 0 & \tau_0<t \end{cases} = \mathrm{tri}$$

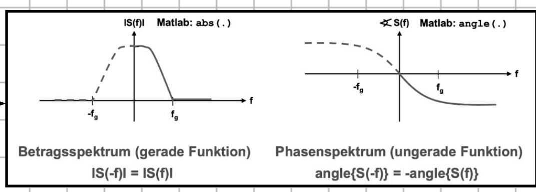
$$\mathcal{F}\{\mathrm{tri}\}(f) = \mathcal{F}\{\mathrm{rect} * \mathrm{rect}\}(f) = \mathcal{F}\{\mathrm{rect}\}(f)\cdot\mathcal{F}\{\mathrm{rect}\}(f) = \left(\mathcal{F}\{\mathrm{rect}\}(f)\right)^2$$
$$= \mathrm{sinc}^2(f)$$

Symmetrien

$s(t)$ reell $\Rightarrow S(-f) = S^*(f)$

$s(t)$ reell & gerade $\Rightarrow S(f)$ reell

$s(t)$ reell & ungerade $\Rightarrow S(f)$ imaginär



Betragsspektrum (gerade Funktion)
|S(-f)| = |S(f)|

Phasenspektrum (ungerade Funktion)
angle{S(-f)} = -angle{S(f)}

periodisches Signal

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \sum_{-\infty}^{\infty} c_k\,\delta(f-kf_0)$$

periodische Signale besitzen also ein „Linien"-förmiges Amplituden-Dichtespektrum
-> Dirac-Impulse anstatt Linien

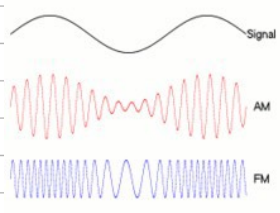
Beweis:

$$\mathcal{F}\{s(t)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}\right) e^{-j2\pi f t}\,dt = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi f t}\,dt = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k\,\mathcal{F}\{e^{j2\pi k f_0 t}\cdot 1\}(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k\,\mathcal{F}\{1\}(f-kf_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k\,\delta(f-kf_0) \quad \square$$

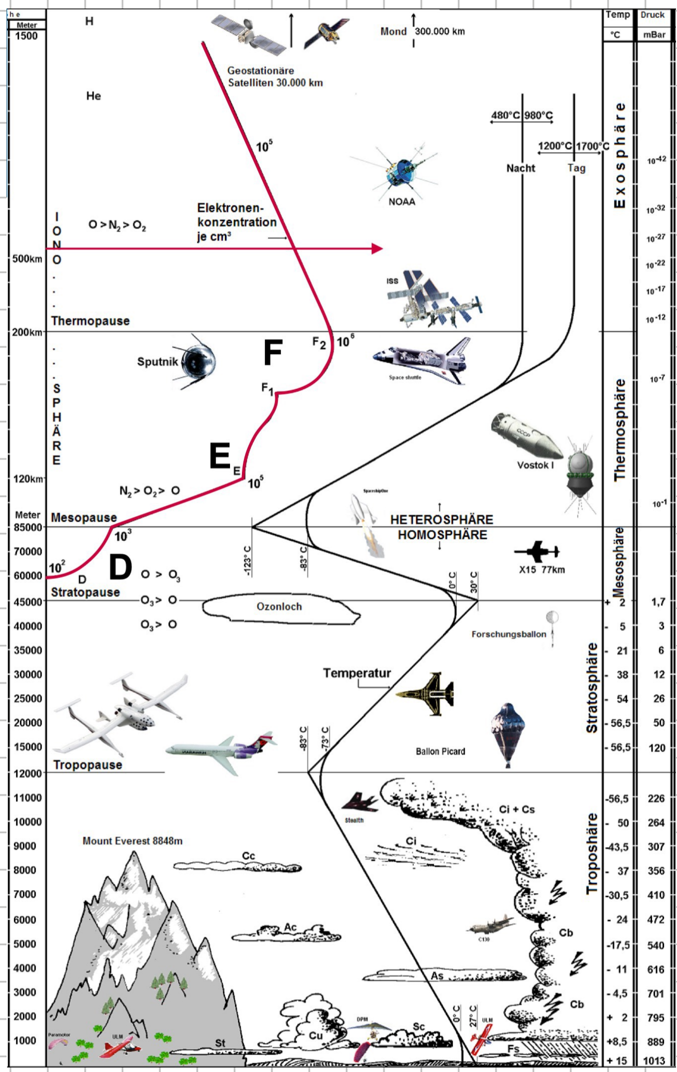
Radio

AM = Amplituden Modulation

FM = Frequenz Modulation



Nötige Signalbandbreite:
- Sprachsignal ~ 3kHz
- Musik (Mono) ~ 25kHz
- Analog-TV ~ 7MHz



Ausbreitung

- Bodenwelle (2D Ausbreitung)
  - vertikal polarisiert
  - Dämpfung ~ Frequenz
- Raumwelle (3D Ausbreitung)
  - beeinflusst durch Ionosphere
  - Dämpfung ~ Frequenz²

Ionosphere

- F-Schicht: für Kurzwellensignale (30MHz)
- E-Schicht: bis 8MHz
- D-Schicht: für langwellige Signale

Zusammenfassung FT

wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation:

	Zeitsignal	Fourier-Spektrum
Fourier-Transformation	s(t)	$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$
Rücktransformation	$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi f t}\, df$	S(f)
Symmetrien	s(t) reell s(t) reell, ungerade Bsp: sin(t) s(t) reell, gerade Bsp: cos(t)	komplex konjugiert S(-f) = S*(f) $\lvert S(-f)\rvert = \lvert S(f)\rvert$, $\arg(S(-f)) = -\arg(S(f))$ S(f) imaginär S(f) reell
Linearität, Superposition	$a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t)$	$a \cdot S_1(f) + b \cdot S_2(f)$
Dualität	S(t)	s(-f)
Zeitverschiebung	$s(t-t_0)$	$S(f) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_0}$ Betragsspektrum bleibt gleich!
Frequenzverschiebung	$s(t) \cdot e^{j2\pi \cdot f_0 \cdot t}$	$S(f-f_0)$
Zeit-Skalierung **(Zeitdauer · Bandbreite ≈ 1)**	$s(a \cdot t)$	$(1/\lvert a\rvert) \cdot S(f/a)$
Differentiation	$d^n/dt^n\, s(t)$	$(j2\pi f)^n \cdot S(f)$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} \cdot S(f) + \frac{1}{2} \cdot S(0) \cdot \delta(f)$
Faltung	x(t)*y(t)	X(f)·Y(f)
Multiplikation	x(t)·y(t)	X(f)*Y(f)
Periodisches Signal	$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t}$	$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(f - kf_0)$
Energie (Parseval)	$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt$	$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert S(f)\rvert^2\, df$

wichtige Fourier-Korrespondenzen:

	Zeitbereich	Frequenzbereich
Dirac-Impuls	δ(t)	1
DC-Signal	1	δ(f)
Rechteckpuls (Dauer τ)	$s(t) = \begin{cases} 1 & \lvert t\rvert \le \tau/2 \\ 0 & \lvert t\rvert > \tau/2 \end{cases}$	$S(f) = \tau \cdot \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$
Exponentialfunktion (mit Zeitkonstante τ)	$s(t) = \begin{cases} (1/\tau) \cdot e^{-t/\tau} & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$S(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f \tau}$
cos-Signal	$s(t) = \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$	$S(f) = (1/2) \cdot \delta(f+f_0) + (1/2) \cdot \delta(f-f_0)$
sin-Signal	$s(t) = \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$	$S(f) = (j/2) \cdot \delta(f+f_0) - (j/2) \cdot \delta(f-f_0)$

LTI - Systeme

nicht-lineare Systeme generieren neue Frequenzkomponenten

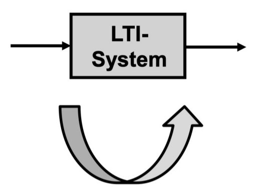
LTI = Linear, Time-Invariant

Stabilität: zweckmässig: Bounded Input => Bounded Output
$|x(t)| \leq A < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq B < \infty$ mit $A, B > 0$

Impulsantwort $h(t)$: Antwort auf Anregung mit allen Frequenzkomponenten (Dirac)

beschreibt LTI-System vollständig, man kann mit $h(t)$ Ausgangssignal für beliebiges Eingangssignal berechnen:

Ausgangssignal $y(t)$: $x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$



$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau}$$

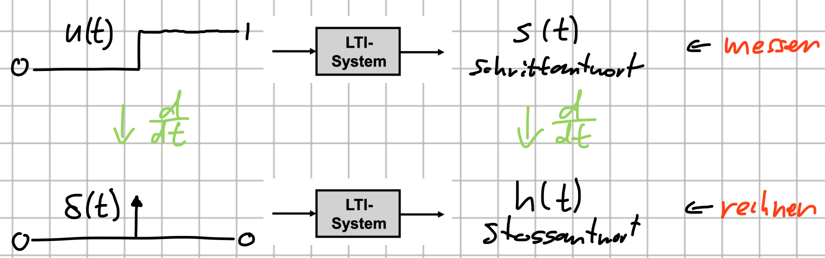
MATLAB: y = conv(x,h)

Stossantwort $h(t) = f(\delta(t))$ bestimmen

Schrittantwort $s(t) = f(u(t))$ messen (einfacher zu messen) und ableiten:

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = \frac{d}{dt}\, s(t)}$$



Fourier-Spektrum des Ausgangssignal bestimmen

$x(t) \rightarrow$ LTI-System $\rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

$X(f) \rightarrow \otimes \rightarrow$ $\boxed{Y(f) = X(f) \cdot H(f)}$

Frequenzgang

Frequenzgang: $H(f) = \dfrac{Y(f)}{X(f)}$

Amplitudengang: $|H(f)| = \dfrac{|Y(f)|}{|X(f)|}$

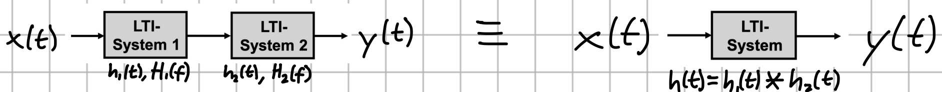
Phasengang: $\varphi_H(f) = \varphi_Y(f) - \varphi_X(f)$

Frequenzgang messen

$\cos(2\pi f_i t)$ mit $A = 1$ anlegen und $|H(f_i)| = |Y(f_i)|$, $\varphi_H(f_i) = \varphi_Y(f_i)$ ablesen

Zusammenschaltung von LTI-Systemen

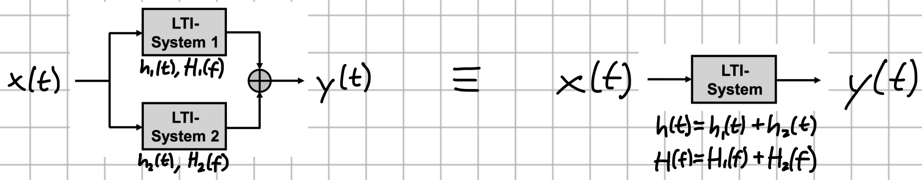
Seriell:



$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$

$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$

Parallel:



$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$

Faltung numerisch

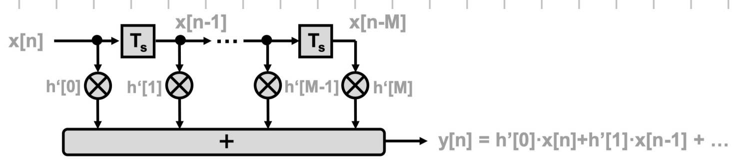
Voraussetzung: Stossantwort $h(t)$ kausal und endlich lang (Finite Impulse Response –> FIR-Filter)

$$y(t) = \int_0^{MT_s} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(nT_s) \approx \sum_{m=0}^{M} h(mT_s)\, x(nT_s - mT_s)\, T_s$$

$$y[n] \approx \sum_{m=0}^{M} h[m]\, x[n-m]\, T_s = \boxed{\sum_{m=0}^{M} h'[m]\, x[n-m] \quad \text{mit} \quad h'[m] = h[m]\, T_s}$$

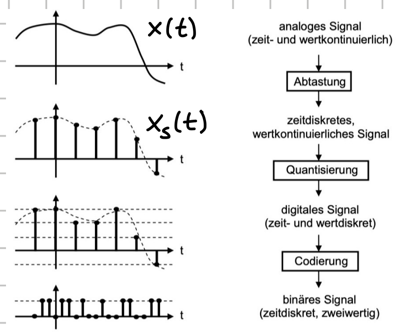
Blockschaltbild



Digitale Signale

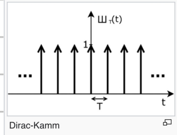
Abtastung

Quintessenz: $\boxed{\text{falls } f_s \geq 2 f_g \Rightarrow \text{Signal rekonstruierbar}}$



Dirac-Kamm:

$$Ш_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$



→ periodisch, lässt sich als Fourierreihe darstellen:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} Ш(t)\, e^{-j2\pi\frac{k}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\, e^{-j2\pi\frac{k}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\, e^{-j2\pi\frac{k}{T}t}dt = \frac{1}{T}$$

$$Ш_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi\frac{k}{T}t} = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{k}{T}t}$$

somit lässt sich ideal abgetastetes Signal schreiben als:

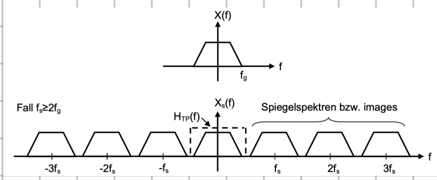
$$x_s(t) = x(t)\, Ш_{T_s}(t) = x(t)\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\delta(t-nT_s)$$

mit $Ш_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi f_s t}$ ergibt sich für das Spektrum:

$$x_s(t) = \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{jn2\pi f_s t}$$

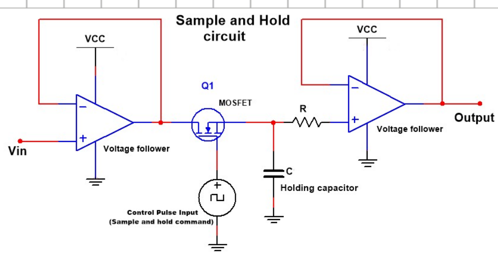
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{\infty} X(f-nf_s)$$

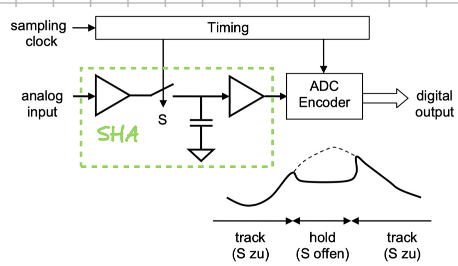


$X_s(f)$ besteht bis auf Normierung aus Originalspektrum sowie Kopien (Spiegelspektren / Images) bei ganzzahligen Vielfachen der Abtastfrequenz f_s

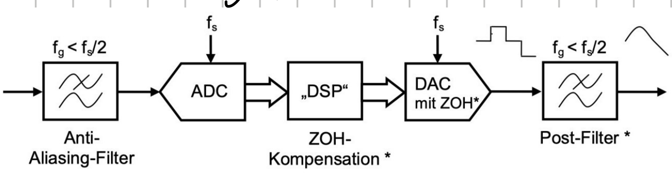
Schaltung für Abtastung: SHA (Sample-and-Hold-Amplifier)

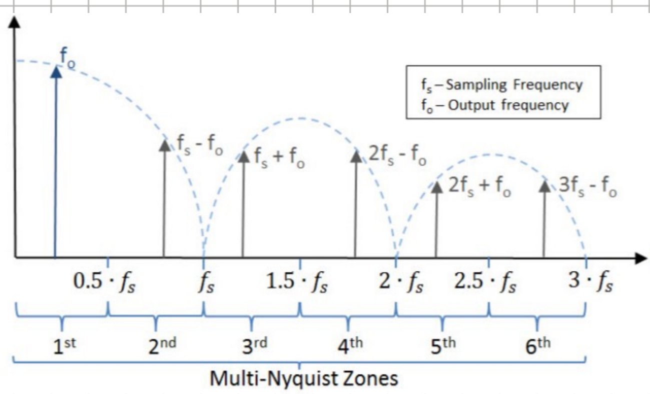


→ meist in ADC integriert:



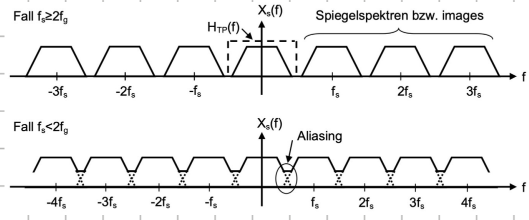
Digitalisierungssystem:





ZOH-Kompensation ist nötig, weil Durchlassbereich des ZOH-Filters nicht konstant ist (sinc-förmig, siehe Abbildung des Spektrums rechts)

Aliasing



falls $f_s < 2f_g$

=> periodisch repetierte Spektralanteile überlappen sich

=> Originalspektrum kann nicht fehlerfrei, sondern nur noch mit nichtlinearen Verzerrungen rekonstruiert werden

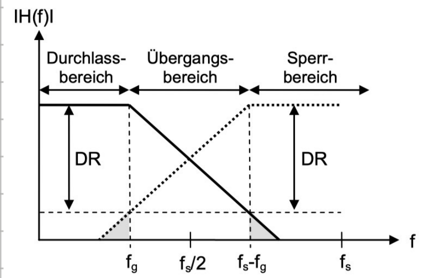
kritische Abtastung: $f_s = 2f_g$

effektiv werden höhere Frequenzkomponenten in tiefere reflektiert

→ Bsp: Räder eines vorwärtsfahrenden Autos drehen in Filmen manchmal rückwärts

um Aliasing zu verhindern => Signal muss auf erstes Nyquistband begrenzt werden

Schaltung um Aliasing zu unterdrücken: Anti-Aliasing-Tiefpass filter



im interessierenden Frequenzband $[0, f_g]$ dürfen keine Aliase entstehen

=> Sperrbereich $\overset{!}{=} [f_s - f_g, \infty)$ mit Sperrdämpfung > Dynamic Range (DR)

=> Breite des Übergangsbereichs $[f_g, f_s - f_g]$ hängt von f_s ab

je näher Abtastrate f_s bei kritischen Abtastrate $2f_g$ gewählt wird, desto steilflankiger (und damit aufwändiger) muss das Filter sein

umgekehrt kann Filter einfacher ausgelegt werden, wenn f_s um einiges grösser als $2f_g$ gewählt wird
→ dann steigt aber auch der Rechenaufwand, da Abtastwerte dann mit der höheren Rate verarbeitet werden müssen

man wählt f_s typischerweise im Bereich $[2.5f_g, 4f_g]$

falls analoges Eingangsignal oberhalb $f_s - f_g$ XdB kleinere kleinere Komponenten als im interessierenden Bereich $f < f_g$ besitzt kann Anforderung an Sperrdämpfung d. Filters von DR auf DR-X gelockert werden

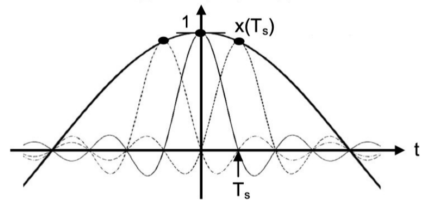
Rekonstruktion

$$X(f) = X_s(f)\, T_s\, H_{TP}(f) \quad \text{wobei} \quad H_{TP}(f) = \begin{cases} 1 & |f| \le f_s/2 \\ 0 & |f| > f_s/2 \end{cases} \bullet\!\!-\!\!\circ \int_{-f_s/2}^{f_s/2} e^{j2\pi f t}\, df = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi t} = f_s \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t}$$

$$x(t) = x_s(t) * \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\sin\left(2\pi \frac{f_s}{2}(t - nT_s)\right)}{2\pi \frac{f_s}{2}(t-nT_s)}$$

Abtasttheorem



=> Jedes mit $f_g < f_s/2$ frequenzbegrenzte Signal $x(t)$ kann mit Hilfe von sinc-Interpolationsfunktionen fehlerfrei aus seinen Abtastwerten $x(nT_s)$ wiedergewonnen werden

Hardware:

nur approximativ möglich: meisten DACs halten am Ausgang einfach diskreten Stützwert während ganzem Abtastintervall T_s fest, um Überschwingungen zu vermeiden:

Halteglied 0. Ordnung (zero order hold (ZOH)):

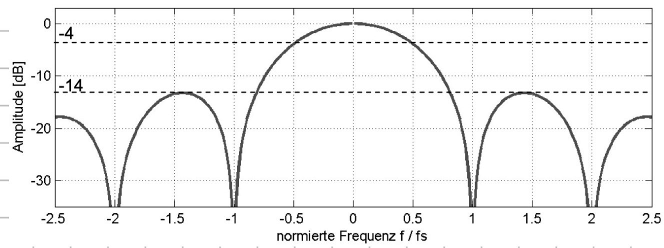
$$\boxed{\begin{aligned} h_{ZOH}(t) &= \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T_s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet \\ H_{ZOH}(f) &= T_s \frac{\sin(\pi f/f_s)}{\pi f/f_s} e^{-j\pi f/f_s} \end{aligned}}$$

Stossantwort des ZOH-Filters

Übertragungsfunktion bzw. Spektrum d. ZOH-Filters

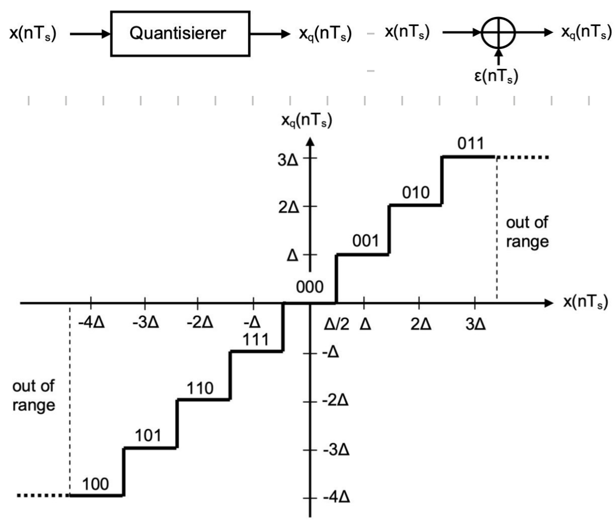
um Ecken zu glätten bzw. hohe Frequenzanteile ganz auszufiltern, muss noch ein Post-Filter nachgeschaltet werden

anders als beim idealen TP-Filter ist der Durchlassbereich beim ZOH also nicht konstant
→ kann kompensiert werden mit einem Filter:
- Vorkompensation (digital)
- Nachkompensation (analog)



Quantisierung

lineare Quantisierung: $\boxed{\Delta = \frac{A}{2^W}}$



A: Aussteuerbereich (total möglicher Wertebereich des Eingangssignals)
W: Wortlänge

resultierende Intervalle werden numeriert bzw. codiert
→ negative Werte mit 2er-Komplement

Rundungsfehler (der nicht mehr rückgängig gemacht werden kann):

$$\varepsilon(nT_s) = x(nT_s) - x_q(nT_s) \in [-\Delta/2, \Delta/2)$$

falls die meisten $x(nT_s) \gg \Delta$ treffen die folgenden Annahmen gut zu:
- die einzelnen $\varepsilon(nT_s)$ sind unkorrelierte, auf $[-\Delta/2, \Delta/2]$ uniformverteilte Zufallsgrössen
- die $\varepsilon(nT_s)$ und die kontinuierlichen Abtastwerte $x(nT_s)$ sind unkorreliert

Leistung des Quantisierunsfehlers

$$P_\varepsilon = E[\varepsilon^2] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon^2 \frac{1}{\Delta} d\varepsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

Signal-to-Noise-Ratio [dB]

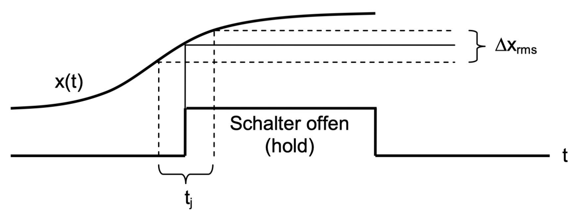
Verhältnis der Leistung des Signals am Quantisierungseingang zur Leistung des Quantisierungsfehler bzw. des Quantisierungsrauschens

$$\boxed{SNR = 10\log_{10}(P_x/P_\varepsilon) = 10\log_{10}(12\cdot 2^{2W}\cdot P_x/A^2) = 10\log_{10}(4)\cdot W + 10\log_{10}(12P_x/A^2) \approx 6W + K}$$

→ mit jedem Bit wird SNR um 6dB erhöht
→ K von P_x abhängig: je kleiner Signalpegel relativ zum Aussteuerbereich ist, desto kleiner SNR
→ selbst wenn ADC voll ausgesteuert wird, ist K umgekehrt proportional zu Crest-Faktor (Verhältnis von Spitzenwert $A/2$ zu Effektivwert $\sqrt{P_x}$) des Signals $x(t)$

Übersteuern des Quantisierers oder ADC unbedingt vermeiden, weil die entstehenden Oberwellen störende Aliasingfrequenzen produzieren können!

Aperture and Clock Jitter

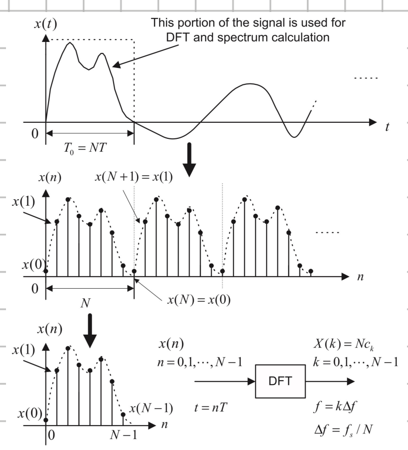


weitere Rauschquellen (neben Quantisierung):

- Aperture Jitter:
  durch Nichtidealitäten des SHA
- Clock Jitter:
  durch Sampling Clock mit Jitter und/oder nichtideale Clock-Zuführungen

je schneller sich Signal innerhalb Jitterzeit t_j ändert, desto grösser ist statistische Fehler ΔX_{rms} bzw. das resultierende Rauschen

Diskrete Fourier Transformation



ideal abgetastetes Signal:

$$x_s(t) = x(t) Ш_{T_s}(t) = x(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT_s)$$

$$X_s(f) = \mathcal{F}\{\sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\}(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi f n T_s} = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n T_s}$$

ab hier nur noch abgetastetes Signal, daher wird Subskript «s» weggelassen

Diskrete Fourier Transformation

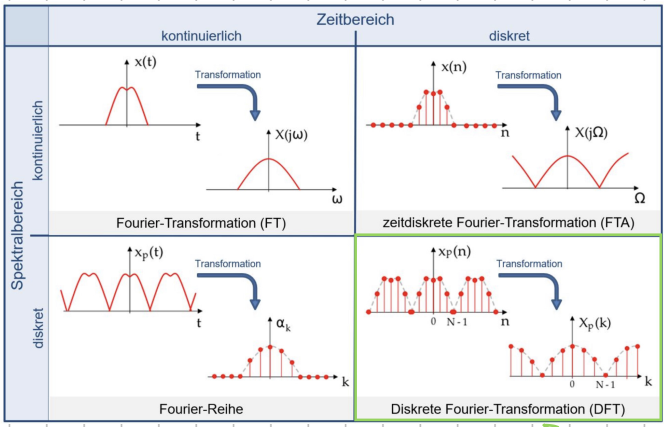
aus N Abtastwerten können maximal N Frequenzwerte bestimmt werden: $f = \frac{m f_s}{N}$, $m = 0, \dots, N-1$

DFT:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{m f_s}{N} n T_s} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} mn}$$

IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j\frac{2\pi}{N} mn}$$



Eigenschaften

- DFT berechnet aus N Abtastwerten im Zeitfenster der Länge $T_{DFT} = NT_s$ N komplexe Spektralwerte im Frequenzbereich $[0, f_s]$
  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Frequenzauflösung } \Delta f = f_s / N = 1/T_{DFT}}$

- für reelle Signale nur erste Hälfte des DTF-Spektrums interessant, denn es gilt die Symmetrie $X^*[N-m] = X[m]$

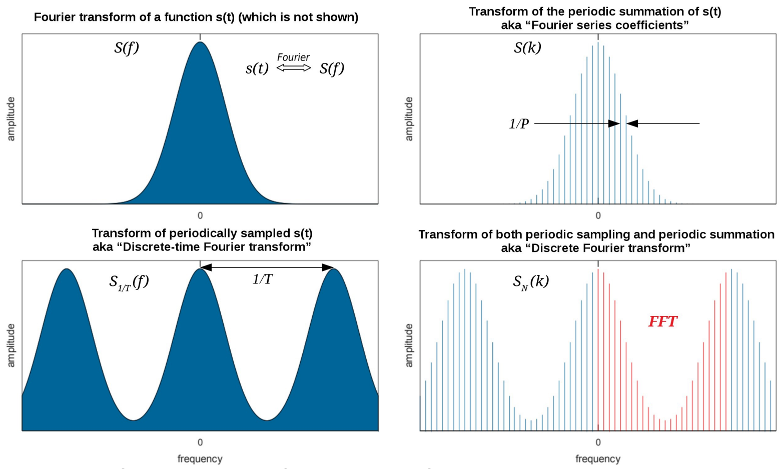
- da DTF-Spektrum diskret $\Rightarrow$ Zeitsignal periodisch
  $\rightarrow$ man berechnet also das Spektrum d. periodisch fortgesetzten, diskreten Zeitfenstersequenz $x_N[n]$:

$$x_{Np}[n] = \dots, \{x_N[n+N]\}, \{x_N[n]\}, \{x_N[n-N]\}, \dots \circ\!\!-\!\!\bullet\; X[m]/N$$

- falls Fensterlänge unpassend gewählt wird, kann es aufgrund d. periodischen Fortsetzung zu Sprungstellen kommen, die im urspr. Signal n. vorhanden waren
  $\rightarrow$ resultierendes Spektrum weist zusätzliche, auslaufende Spektrallinien auf (leakage)

Matrizenschreibweise

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$



Depiction of a Fourier transform (upper left) and its periodic summation (DTFT) in the lower left corner. The spectral sequences at (a) upper right and (b) lower right are respectively computed from (a) one cycle of the periodic summation of s(t) and (b) one cycle of the periodic summation of the s(nT) sequence. The respective formulas are (a) the Fourier series integral and (b) the DFT summation. Its similarities to the original transform, S(f), and its relative computational ease are often the motivation for computing a DFT sequence.

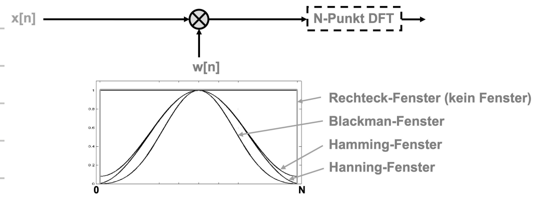
Approximation d. Fourierreihe:

$x(t)$ sei periodisch mit Grundfrequenz f_0

N samples von einer Periode T_0 $\Rightarrow f_s = N f_0$

$$c_m = \frac{X[m]}{N} \quad \text{für } m = 0, \dots, N/2$$

Fensterung



Gewichtung von $x[n]$ mit einem auslaufenden Fenster (window) $w[n]$, um leakage zu reduzieren:

$$x_w[n] = x[n] \cdot w[n]$$

FFT

$N \log_2(N)$ statt N^2 komplexe Multiplikationen

Übertragungsfunktion

$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI-System}} \longrightarrow y(t)$

DGL eines Systems:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

Laplace-Transformation (Anfangswert $= 0$, $s = \sigma + \omega j$):

$$a_n s^n Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + \dots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

Übertragungsfunktion

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}}$$

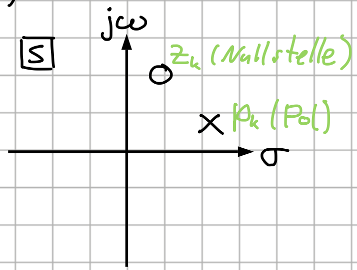
→ (b, a)-Systemkoeffizienten legen Systemverhalten vollständig fest

$H(s) = B(s)/A(s)$ ist gebrochen rationale Funktion, wobei Zählergrad $m \leq$ Nennergrad n

$B(s)$ hat m Nullstellen z_k (Nullstellen UTF)
$A(s)$ hat n Nullstellen p_k (Polstellen UTF)

Pol-Nullstellen-Darstellung

$$\boxed{H(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)}}$$



→ Pole & Nullstellen legen Systemverhalten fest bis auf Gain-Konstante b_m / a_n

falls b_k & a_k alle reell ⇒ z_k und p_k entweder reell oder in kompl. konj. Paar

Stabilität

UTF ist stabil wenn Pole von $H(s)$ in linker Halbebene (LHE) liegen

Beweis für $m < n$:

$$H(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(s-p_k)} \overset{\text{inverse LT}}{\Longrightarrow} h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k u(t) e^{p_k t}$$

$$|h(t)| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k u(t) e^{p_k t}| = \sum_{k=1}^{n} |c_k| u(t) e^{p_k t}$$

$|h(t)| < \infty$ wenn alle $\mathrm{Re}(p_k) < 0$

⇒ Frequenzgang $H(f) = H(s = j2\pi f)$ existiert

Frequenzgang

$H(f) = H(s = j2\pi f) = H(s = j\omega)$, d.h. $\sigma = 0$

$$H(\omega) = K \cdot \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)\cdots(j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\cdots(j\omega - p_m)}$$

→ je näher ein Pol p_k bei $j\omega$-Achse, desto grösser die Überhöhung im Amplitudengang
→ Nullstellen auf $j\omega$-Achse ergeben Nullstellen im Amplitudengang

Faktorisierung von H(s) in Teil-UTF 1. und 2. Ordnung

Normierung auf Eckfrequenz ω/ω_0 bzw. s/ω_0

$m = m_0 + m_1 + 2m_2$ Nullstellen d. UTF H(s), davon m_0 bei $s=0$, m_1 reell, $2m_2$ komplex
$n = n_0 + n_1 + 2n_2$ Polstellen d. UTF H(s), davon n_0 bei $s=0$, n_1 reell, $2n_2$ komplex

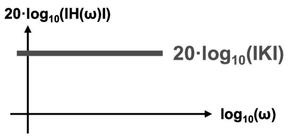
$$\boxed{H(s) = K\, s^{m_0-n_0} \frac{\prod^{m_1}\left(1+\frac{s}{\omega_{z_k}}\right) \prod^{m_2}\left(1+\frac{s}{q_{z_k}\omega_{z_k}}+\frac{s^2}{\omega_{z_k}^2}\right)}{\prod^{n_1}\left(1+\frac{s}{\omega_{p_k}}\right) \prod^{n_2}\left(1+\frac{s}{q_{p_k}\omega_{p_k}}+\frac{s^2}{\omega_{p_k}^2}\right)}}$$

UTF ist also in Teil-UTF zerlegbar:

Konstante H(s) = K

Amplitudengang: 20·log$_{10}$(|K|)

Phasengang: 0° wenn K > 0 sonst 180°

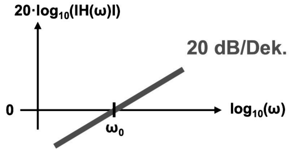


$H(s) = k$

NS im Ursprung (Differentiator) H(s) = s/ω$_0$

Amplitudengang: 20 dB / Dekade

Phasengang: konstant 90°

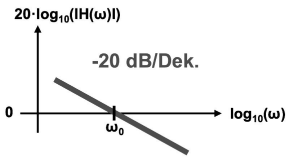


$H(s) = \frac{s}{\omega_0} = Ts$

Pol im Ursprung (Integrator) H(s) = 1/(s/ω$_0$)

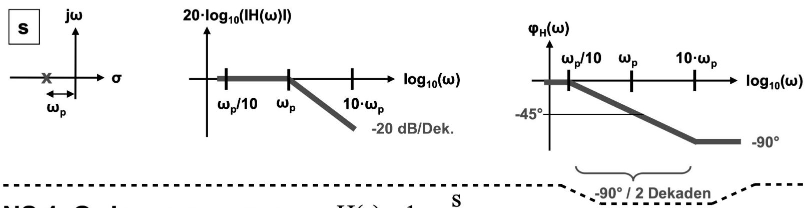
Amplitudengang: -20 dB / Dekade

Phasengang: konstant -90°



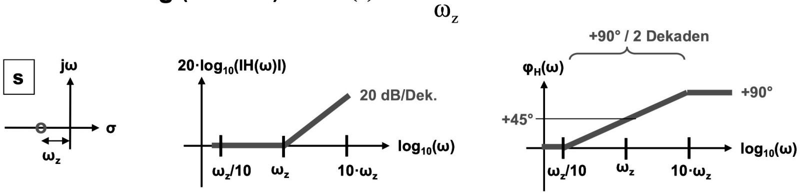
$H(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0}} = \frac{1}{Ts}$

Pol 1. Ordnung (PT1-Glied) $H(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_p}}$



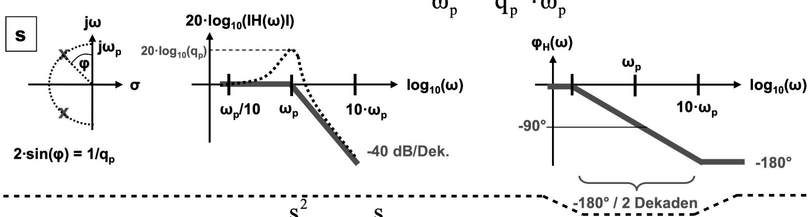
$H(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_p}} = \frac{1}{Ts+1}$

NS 1. Ordnung (PD-Glied) $H(s) = 1+\frac{s}{\omega_z}$



$H(s) = 1+\omega_z s = Ts+1$

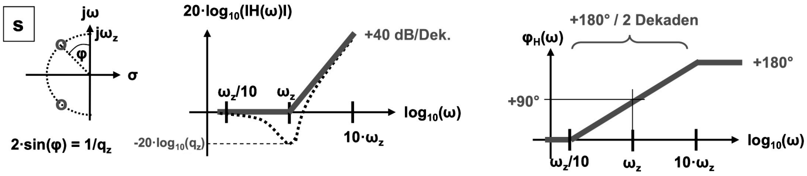
Pol 2. Ordnung (PT2-Glied) $H(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_p^2}+\frac{s}{q_p\cdot\omega_p}+1}$



$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2+\frac{1}{q_p}\frac{s}{\omega_p}+1} = \frac{\omega_p^2}{s^2+\frac{1}{q_p}\omega_p s+\omega_p^2} = \frac{\omega_p^2}{s^2+2\xi\omega_p s+\omega_p^2}$$

$H(j\omega_p) = \frac{q_p}{j} = -jq_p$
$\rightarrow 20\log(q_p)$

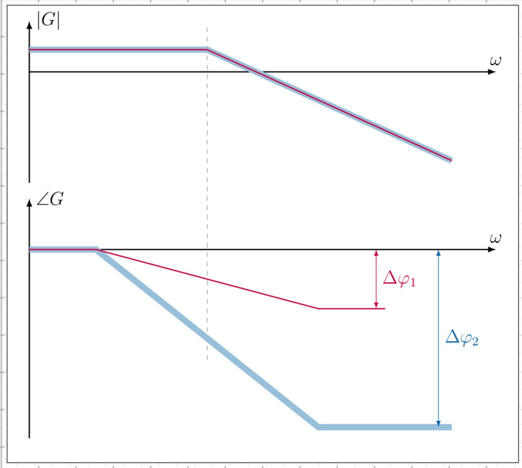
NS 2. Ordnung $H(s) = \frac{s^2}{\omega_z^2}+\frac{s}{q_z\cdot\omega_z}+1$



$$H(s) = \left(\frac{s}{\omega_z}\right)^2+\frac{1}{q_z}\frac{s}{\omega_z}+1 = \frac{s^2+\frac{1}{q_z}\omega_z s+\omega_z^2}{\omega_z^2} = \frac{s^2+2\xi\omega_z s+\omega_z^2}{\omega_z^2}$$

$H(j\omega_z) = \frac{j}{q_z} = j\frac{1}{q_z}$
$\rightarrow -20\log(q_z)$

Minimalphasensysteme



Phasenlaufzeit: $\tau_p(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi \cdot f}$

Gruppenlaufzeit: $\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(f)}{df}$

→ Zeitverzögerung der Enveloppe eines Signales, das aus mehreren Frequenzkomponenten besteht

Definition Minimalphasensystem

ein kontinuierliches Zeitsystem heisst minimalphasig, falls der Phasenbereich im Vergleich zu jedem anderen System mit derselben Amplitudenantwort minimal ist

Nullstellen in RHE „kein" Einfluss auf Amplitudengang $|H(f)|$ aber auf Phasengang (LTI-System nicht minimalphasig)

Minimalphasensysteme haben keine Nullstellen in RHE!

Phasengang $\varphi(f)$ nimmt langsamer ab als bei Nicht-Minimalphasensystemen, sie haben kleinst-mögliche Gruppenlaufzeit $\tau_g(f)$ (Zeitverzögerung!)

asymptotisches Verhalten:

- Amplitudengang: $|H(\omega \to \infty)|$ fällt mit $(m-n) \cdot 20\,dB$ pro Dekade
- Phasengang: $\varphi_H(\omega \to \infty) = (m-n) \cdot 90°$ jede NS trägt $+\pi/2$ bei, jeder Pol trägt $-\pi/2$ bei

Generell können Nicht-Minimalphasensysteme in ein Allpass und ein Minimalphasensystem aufgeteilt werden

bei kausalen Systemen ist $\Delta\varphi$ negativ!